Chapitre 9 : Equations différentielles

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

I Equations différentielles linéaire du premier ordre

1.1 Définition

Définition 1

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues sur I.

- On dit que $y : I \to \mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielles linéaire d'ordre un $y' + a(x)y = b(x)$ si et seulement si : y est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ \ y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$.
- On appelle équation homogène (ou sans second membre) associée à (E), l'équation :

$$y' + a(x)y = 0 \quad (E_0)$$

1.2 Résolution de l'équation homogène

Proposition 1

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I et $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de a sur I.

Les solutions sur I de $(E_0) : y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-A(x)} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Preuve.

□

➪ **Exemple 1 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + xy = 0.$$

Corollaire 1

Soit $a \in \mathbb{K}$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' + ay = 0$ sont les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda e^{-ax} \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Preuve.

□

Corollaire 2

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution de l'équation $y' + a(x)y = 0$ telle que $y(x_0) = y_0$ qui est : $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \end{array}$.

Remarque : Le système constitué de l'équation différentielle et de la condition intiale :

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + a(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

s'appelle un problème de Cauchy.

Preuve.

□

1.3 Résolution de l'équation avec second membre

Proposition 2

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues sur I.
L'équation $y' + a(x)y = b(x)$ admet au moins une solution.

Preuve.

□

Proposition 3

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues sur I et (E) : $\quad y' + a(x)y = b(x)$.
Si y_p est une solution particulière de (E) et si S_0 est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E), alors l'ensemble S des solutions de (E) est :

$$S = \{y_p + y_0\ ,\ y_0 \in S_0\}.$$

Remarque : Les solutions de l'équation avec second membre sont la somme **des** solutions de l'équation homogène et d'**une** solution particulière.

Preuve.

□

➪ **Exemple 2 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + xy = x.$$

➪ **Exemple 3 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}.$$

Méthode 1

L'équation différentielle :

$$y' + ay = b\cos(\alpha x) + c\sin(\alpha x),$$

avec $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$ admet une solution particulière de la forme :

$$x \longmapsto A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x),$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.

➪ **Exemple 4 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y' - y = -2\sin x.$$

➪ **Exemple 5 :** Déterminer les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in [0,1],\ f'(x) - f(x) = f(0) + f(1).$$

Proposition 4

Soit (E) l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ où a et b sont continues sur I. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$ de (E) telle que $y(x_0) = y_0$.

Preuve.

□

1.4 Principe de superposition

Proposition 5 (Principe de superposition)

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.
On suppose que $b = \sum_{k=1}^{n} b_k$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $b_k : I \to \mathbb{K}$ continue.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$, soit y_k une solution sur I de $y' + a(x)y = b_k(x)$.
Alors la fonction $y = \sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution de $y' + a(x)y = b(x)$.

Preuve.

$\square$

➪ **Exemple 6 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 2 + 3e^x - 4\sin(2x).$$

1.5 Méthode de la variation de la constante

Méthode 2 : Recherche d'une solution particulière : Méthode de variation de la constante

Soit l'équation différentielle $(E)\quad y' + a(x)y = b(x)$ où a et b sont continues sur I.
Soit A une primitive de a sur I.

- Les solutions sur I de l'équation homogène $E_0)\ y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-A(x)} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
- On cherche une solution particulière de (E) sur I de la forme $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda(x)e^{-A(x)} \end{array}$ où λ est une fonction dérivable.
  On a :

$$\begin{aligned} y' + a(x)y = b(x) &\iff \forall x \in I,\ \lambda'(x)e^{-A(x)} + \lambda(x)(-A'(x))e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = b(x) \\ &\iff \forall x \in I,\ \lambda'(x) = b(x)e^{A(x)} \end{aligned}$$

  La détermination d'une solution particulière de (E) se ramène ainsi à la recherche d'une primitive de $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$ sur I.

➪ **Exemple 7 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$(1 + x^2)y' - xy = x(1 + x^2).$$

➪ **Exemple 8 :** Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$xy' + y = \cos(x).$$

II Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

2.1 Définition

Définition 2

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue.

- On dit que y est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $ay'' + by' + cy = f(x)$ (E) si et seulement si y est deux fois dérivable et : $\forall x \in I,\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$.
- On appelle équation homogène associée à (E) l'équation : $ay'' + by' + cy = 0 \quad (E_0)$.

2.2 Résolution de l'équation homogène

Définition 3

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et soit (E_0) l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$.
L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée **équation caractéristique** de (E_0).

Proposition 6

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et soit (E_0) l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$.
Soit $r \in \mathbb{C}$. La fonction $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.

Preuve.

□

Lemme 1

Soient $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$. Soit r une racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable. Posons $z : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{-rx}y(x) \end{array}$. On a : $ay'' + by' + cy = 0$ ssi $az'' + (2ar + b)z' = 0$.

Preuve.

□

Théorème 1

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$.
Si $b^2 - 4ac = 0$ alors l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet une racine double $r_0 \in \mathbb{K}$.
Les solutions de (E_0) sont alors les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & (\lambda x + \mu)e^{r_0 x} \end{array} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 9 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Théorème 2

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$.
Si $b^2 - 4ac \neq 0$ alors l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$.
Les solutions de (E_0) sont alors les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \end{array} \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 10 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 2iy' - 2y = 0.$$

Théorème 3

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$.
Si $b^2 - 4ac > 0$ alors l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines r_1 et r_2 dans $\mathbb{R}$.
Les solutions de (E_0) sont alors les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 11 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Théorème 4

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$.
Si $b^2 - 4ac < 0$ alors l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines complexes conjuguées non réelles $\alpha \pm i\beta$, (avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$).
Les solutions de (E_0) sont alors les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \big(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\big)\, e^{\alpha x} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 12 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

➪ **Exemple 13 :** Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$x^2 y'' + y = 0.$$

On pourra poser $t = \ln x$.

➪ **Exemple 14 :** Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0.$$

On pourra poser $z = e^{x^2} y$.

2.3 Résolution de l'équation avec second membre

Proposition 7

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue.
L'équation $ay'' + by' + cy = f(x)$ admet au moins une solution.

Preuve.

□

Proposition 8

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue.
Soit $(E) : ay'' + by' + cy = f(x)$.
Si y_p est une solution particulière de (E) et si S_0 est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E), alors l'ensemble S des solutions de (E) est :

$$S = \{y_p + y_0\ ,\ y_0 \in S_0\}.$$

Preuve.

□

Méthode 3 : Recherche d'une solution particulière

- L'équation différentielle $ay''+by'+cy=Ae^{\lambda x}\quad (E)$ où $a,b,c,A,\lambda\in\mathbb{K}$ admet une solution de la forme :
  - $x\mapsto Be^{\lambda x}$ si λ n'est pas solution de l'équation caractéristique ;
  - $x\mapsto Bxe^{\lambda x}$ si λ est racine simple de l'équation caractéristique ;
  - $x\mapsto Bx^2e^{\lambda x}$ si λ est racine double de l'équation caractéristique ;

  où $B\in\mathbb{K}$.
- L' équation différentielle $ay''+by'+cy=A_1\cos(\beta x)+A_2\sin(\beta x)\quad (E)$ où $a,b,c,A_1,A_2\in\mathbb{R}$ avec $\beta\in\mathbb{R}^*$ admet une solution de la forme :
  - $x\mapsto B_1\cos(\beta x)+B_2\sin(\beta x)$ si $i\beta$ n'est pas solution de l'équation caractéristique ;
  - $x\mapsto B_1x\cos(\beta x)+B_2x\sin(\beta x)$ si $i\beta$ est racine simple de l'équation caractéristique.

  où $B_1,B_2\in\mathbb{R}$.

➪ **Exemple 15 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$-3y''-2y'+y=\cos(x).$$

2.4 Principe de superposition

Proposition 9 : Principe de superposition

Soient $a,b,c\in\mathbb{K}$, $a\neq 0$, soit $f:I\to\mathbb{K}$ continue. On suppose que $f=\sum_{k=1}^{n}f_k$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ et, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $f_k:I\to\mathbb{K}$ continue.
Soit $k\in[\![1,n]\!]$, soit y_k une solution sur I de $ay''+by'+cy=f_k(x)$.
Alors la fonction $y=\sum_{k=1}^{n}y_k$ est une solution de $ay''+by'+cy=f(x)$.

Preuve.

□

➪ **Exemple 16 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y''-3y'+2y=e^{-x}+e^{2x}.$$

2.5 Problème de Cauchy

Proposition 10

Soit (E) l'équation différentielle $ay''+by'+cy=f(x)$ où $a,b,c\in\mathbb{K}$, $a\neq 0$, et f continue sur I.
Soient $x_0\in I$ et $y_0,y_0'\in\mathbb{K}$.
Il existe une unique solution $y:I\to\mathbb{K}$ de (E) telle que $\begin{cases} y(x_0)=y_0\\ y'(x_0)=y_0'\end{cases}$.

Remarque : Comme l'équation différentielle est d'ordre 2, la condition initiale doit être double pour avoir l'unicité de la solution.

Preuve. Soit r une racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. Soit $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable. Posons $z : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{-rx} y(x) \end{array}$.
En reprenant les résultats de la preuve de la proposition 7, ona :

$$ay'' + by' + cy = f(x) \Longleftrightarrow \quad Z' + \frac{2ar + b}{a} Z = \frac{f(x)e^{-rx}}{a},$$

avec $Z = z'$.
De plus :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{array} \right. &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z(x_0) = y_0 e^{-rx_0} \\ z'(x_0)e^{rx_0} + rz(x_0)e^{rx_0} = y'_0 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z(x_0) = y_0 e^{-rx_0} \\ z'(x_0) = y'_0 e^{-rx_0} - rz(x_0) \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z(x_0) = y_0 e^{-rx_0} \\ Z(x_0) = y'_0 e^{-rx_0} - ry_0 e^{-rx_0} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Soit Z_0 l'unique solution de $Z' + \frac{2ar+b}{a} Z = \frac{f(x)e^{-rx}}{a}$ telle que : $Z(x_0) = y'_0 e^{-rx_0} - ry_0 e^{-rx_0}$. On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} ay'' + by' + cy = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z(x_0) = y_0 e^{-rx_0} \\ Z = Z_0 \end{array} \right.$$

Soit z_0 l'unique primitive de Z_0 telle que $z(x_0) = y_0 e^{-rx_0}$, on a donc :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} ay'' + by' + cy = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{array} \right. &\Longleftrightarrow z = z_0 \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in I,\ y(x) = z_0(x)e^{rx}. \end{aligned}$$

D'où l'unicité de y. □