Correction : Matrices et probabilités

d'après E3A - MP - 2023

1. (a) On a $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$, $\dim\left(\operatorname{Im} p\right) = r$ et pour tout $x \in \operatorname{Im} p$ on a $p(x) = x$. Donc, dans une base adaptée à la somme directe $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$, la matrice W de p s'écrit :
$$W = \operatorname{diag}(\underbrace{0,\dots,0}_{n-r},\underbrace{1,\dots,1}_{r}).$$
   (b) On a $\operatorname{tr}(W) = \underbrace{1+\cdots+1}_{r \text{ termes}} = r = \operatorname{rg}(W)$.
   (c) $\det(W) = 1$ si $r = n$ c'est-à-dire si $p = id_E$ et $\det(W) = 0$ sinon .
2. (a) Pour tout ω dans $\Omega, M(\omega)$ est semblable à $\Delta(\omega) = \operatorname{diag}\left(X_1(\omega),\dots,X_n(\omega)\right)$, donc $T(\omega) = \operatorname{tr}(\Delta(\omega)) = X_1(\omega)+\ldots+X_n(\omega)$.
Or $X_i(\Omega) = \{0,1\}$ donc :
$$T(\Omega) = [\![0,n]\!].$$
   (b) T est la somme de $X_1,\dots,X_n$ qui sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. Ainsi :
$$T \sim \mathcal{B}(n,p) \text{ et } E(T) = np.$$
3. Soit $\omega \in \Omega$, comme $M(\omega)$ est semblable à $\Delta(\omega)$, il existe $Q(\omega) \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M(\omega) = Q(\omega)\Delta(\omega)Q(\omega)^{-1}$. Ainsi :
$$M(\omega)^2 = Q(\omega)\Delta(\omega)^2Q(\omega)^{-1} = Q(\omega)\operatorname{diag}(X_1(\omega)^2,\dots,X_n(\omega)^2)Q(\omega)^{-1}.$$
Or, $X_i(\omega) \in \{0,1\}$ donc $X_i(\omega)^2 = X_i(\omega)$. Ainsi :
$$M(\omega)^2 = Q(\omega)\operatorname{diag}(X_1(\omega),\dots,X_n(\omega))Q(\omega)^{-1} = Q(\omega)\Delta(\omega)Q(\omega)^{-1} = M(\omega).$$
Donc $M(\omega)$ est la matrice d'une projection.
Ainsi, d'après 1.(b), $R(\omega) = \operatorname{rg}\left(M(\omega)\right) = \operatorname{tr}\left(M(\omega)\right) = T(\omega)$. Donc :
$$R \sim \mathcal{B}(n,p).$$
4. (a) Pour tout ω dans Ω , $M(\omega)$ est la matrice d'une projection donc $\det\left(M(\omega)\right) = 1$ ou 0. Ainsi :
$$D(\Omega) = \{0,1\}.$$
   (b) D'après 1.(c), $(D = 1)$ signifie $\Delta = I_n$, ainsi :
$$(D=1) = \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} (X_i = 1).$$
Or $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes ainsi :
$$P(D=1) = \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i = 1\right) = \prod_{i=1}^{n} p = p^n.$$
Donc :
$$D \sim \mathcal{B}(p^n) \text{ et } E(D) = p^n.$$
5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $E_\lambda(M) \neq 0$. Alors $\ker(M-\lambda I_n) \neq \{0\}$ donc $M-\lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{R})$ ainsi $\det(M-\lambda I_n) = 0$. D'où $\det(\Delta-\lambda I_n) = 0$.
Or $\Delta - \lambda I_n = \operatorname{diag}(X_1-\lambda,\dots,X_n-\lambda)$. Ainsi $\det(\Delta-\lambda I_n) = \prod_{i=1}^{n}(X_i-\lambda)$. Donc $\prod_{i=1}^{n}(X_i-\lambda) = 0$.
Ainsi, il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda = X_i$. On a donc $\lambda \in \{0,1\}$.
Donc M possède au plus deux espaces propres : $E_0(M)$ et $E_1(M)$.
6. (a) D'après la question précédente, les sous-espace propres de M sont les $E_\lambda(M)$ avec $\prod_{i=1}^{n}(X_i-\lambda) = 0$.
Ainsi M ne possède qu'un seul espace propre ssi $X_1 = \cdots = X_n = 1$ ou $X_1 = \cdots = X_n = 0$. Ainsi :
$$V = \left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i=0)\right)\bigcup\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i=1)\right).$$
Donc, par incompatibilité puis par indépendance :
$$P(V) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i=0) + \prod_{i=1}^{n} P(X_i=1) = (1-p)^n + p^n.$$

(b)
- Si les sous-espaces de M ont tous la même dimension et si M admet deux espaces propres. Alors $\dim(E_0(M)) = \dim(E_1(M))$.
  Or $\dim(E_0(M)) = \dim(\ker M)$ et $\dim(E_1(M)) = \dim(\ker(M - I_n)) = \dim(\operatorname{Im} M)$ car M est la matrice d'une projection. Donc $\dim(\ker M) = \dim(\operatorname{Im} M)$.
  Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\ker M) + \dim(\operatorname{Im} M) = n$ donc $n = 2\dim(\ker M)$ est pair. Ce qui est absurde.
- Ainsi,si les sous-espaces de M ont tous la même dimension alors M admet un seul espace propre.
- Réciproquement, il est évident que si M admet un seul espace propre alors les sous-espaces de M ont tous la même dimension.
- Ainsi $Z = V$ et donc :
$$P(Z) = P(V) = (1-p)^n + p^n.$$

(c)
- Comme $T \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors :
$$P(T = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = \binom{2r}{r} p^r (1-p)^r.$$
- Z signifie que M ne possède qu'un seul espace propre ou que M possède deux espaces propres avec $\dim(E_0(M)) = \dim(E_1(M)) = r$ c'est à dire $T = r$.
  Donc : $Z = V \cup (T = r)$. Ainsi, par incompatibilité :
$$P(Z) = (1-p)^n + p^n + \binom{2r}{r} p^r (1-p)^r.$$

7. .

(a) Soit $\omega \in \Omega$,on a
$$A = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(\omega) & \cdots & X_n(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(\omega)^2 & X_1(\omega)X_2(\omega) & \cdots & X_1(\omega)X_n(\omega) \\ X_1(\omega)X_2(\omega) & X_2(\omega)^2 & \cdots & X_2(\omega)X_n(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1(\omega)X_n(\omega) & X_2(\omega)X_n(\omega) & \cdots & X_n(\omega)^2 \end{pmatrix}$$
Ainsi, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a :
$$a_{i,j}(\omega) = X_i(\omega)X_j(\omega).$$

(b) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, comme $X_i(\Omega) = X_j(\Omega) = \{0, 1\}$, on a : $a_{i,j}(\Omega) = \{0, 1\}$.
De plus $(a_{i,j} = 1) = (X_i = 1) \cap (X_j = 1)$. Ainsi :
- Si $i = j$, $P(a_{i,j} = 1) = P(X_i = 1) = p$ donc $a_{i,j} \sim \mathcal{B}(p)$.
- Si $i \neq j$, par indépendance, $P(a_{i,j} = 1) = P(X_i = 1).P(X_j = 1) = p^2$ donc $a_{i,j} \sim \mathcal{B}(p^2)$.

(c) Soit $\omega \in \Omega$, on a $\operatorname{tr}(A(\omega)) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2(\omega)$, or $X_i(\omega) \in \{0, 1\}$ donc $X_i^2(\omega) = X_i(\omega)$, d'où $\operatorname{tr}(A(\omega)) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$ ainsi :
$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(d) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. La j-ème colonne de A est $X_j.\begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$ ainsi $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$.

Donc $\dim \operatorname{Im} A = 1$ si $\begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{rg}(A) = 0$ sinon. Ainsi :
$$\operatorname{rg}(A)(\Omega) = \{0, 1\}.$$

(e) D'après la question précédente : $(\operatorname{rg}(A) = 0) = \bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} (X_i = 0)$ donc, par indépendance : $P(\operatorname{rg}(A) = 0) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = 0) = (1-p)^n$.
Ainsi, $P(\operatorname{rg}(A) = 1) = 1 - (1-p)^n$ et donc :
$$\operatorname{rg}(A) \sim \mathcal{B}(1 - (1-p)^n).$$