

# Correction : Matrice et déterminant de Gram

## Partie 1 :

$$1. \bullet G(u, v) = \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) \\ (v|u) & (v|v) \end{vmatrix} = (u|u)(v|v) - (u|v)(v|u) = \|u\|^2\|v\|^2 - (u|v)^2$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|(u|v)| \leq \|u\|\|v\|$$

$$\text{Donc } (u|v)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2.$$

Donc :

$$G(u, v) \geq 0/$$

$$\bullet G(u, 0) = 0 \Leftrightarrow (u|v)^2 = \|u\|^2\|v\|^2 \Leftrightarrow |(u|v)| = \|u\|\|v\|.$$

Donc, d'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$G(u, v) = 0$  ssi  $u$  et  $v$  sont colinéaires.

2. (a) On a  $(u|w) = (v|w) = 0$  Donc :

$$G(u, v, w) = \begin{vmatrix} \|u\|^2 & (u|v) & 0 \\ (u|v) & \|v\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|w\|^2 \end{vmatrix} = \|w\|^2 \begin{vmatrix} \|u\|^2 & (u|v) \\ (u|v) & \|v\|^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Donc } G(u, v, w) = \|w\|^2 G(u, v).$$

(b) Il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $w = \lambda u + \mu v$ .

$$G(u, v, w) = \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (\lambda u + \mu v|u) & (\lambda u + \mu v|v) & (\lambda u + \mu v|w) \end{vmatrix}$$

En utilisant la linéarité par rapport à la dernière ligne :

$$G(u, v, w) = \lambda \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (u|u) & (u|v) & (u|w) \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \end{vmatrix}$$

Or les 1<sup>ère</sup> et 3<sup>ème</sup> lignes du premier déterminant sont égales et les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> lignes du second déterminant sont égales.

Donc :  $G(u, v, w) = 0$ .

(c)

$$G(u, v, w) = \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|t) \\ (v|u) & (v|v) & (v|t) \\ (t|u) & (t|v) & (n|n) + (t|t) \end{vmatrix}$$

car  $(t|n) = (n|t) = 0$  et  $(u|n) = (v|n)$ .

En utilisant la linéarité par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned} a(u, v, w) &= \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|t) \\ (v|u) & (v|v) & (v|t) \\ (t|u) & (t|v) & (t|t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & 0 \\ (v|u) & (v|v) & 0 \\ (t|u) & (t|v) & (n|n) \end{vmatrix} \\ &= G(u, v, t) + \|n\|^2 G(u, v) \end{aligned}$$

Or, d'après 2.b  $G(u, v, t) = 0$ , donc :

$$G(u, v, w) = \|n\|^2 G(u, v).$$

(d) • Comme  $\text{Vect}(u, v) \oplus \text{Vect}(u, v)^\perp = E$ , tout vecteur  $w$  est de la forme de la question précédente.

• Si  $(u, v, w)$  libre, alors  $u$  et  $v$  sont non colinéaires. Donc  $G(u, v) \neq 0$  d'après 1.

De plus, si  $n = 0$ , alors  $w = t \in \text{Vect}(u, v)$ . Donc  $(u, v, w)$  liée.

Donc  $n \neq 0$ , ainsi  $\|n\| \neq 0$ .

Donc  $G(u, v, w) \neq 0$

• Si  $G(u, v, w) \neq 0$ , alors  $G(u, v) \neq 0$  et  $\|n\|^2 \neq 0$ . " Si  $(u, v, w)$  liée, alors il existe  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$  et  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$

– Si  $\lambda_3 = 0$ , alors  $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$ .

Or  $G(u, v) \neq 0$  donc  $u$  et  $v$  non colinéaires donc  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  ce qui est absurde.

– On a donc  $\lambda_3 \neq 0$ . Donc  $w = -\frac{\lambda_1 u + \lambda_2 v}{\lambda_3}$ . Ainsi  $w$  est combinaison linéaire de  $u$  et  $v$ .

D'où  $w = t$  et  $n = 0$  ce qui contredit  $\|n\|^2 \neq 0$ .

Donc  $(u, v, w)$  libre.

Ainsi  $(u, v, w)$  libre ssi  $G(u, v, w) \neq 0$ .

**Partie 2 :**

1. Il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$  tel que :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j = 0.$$

Donc :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n \lambda_j (u_i | 1_j) = 0$ .

Posons  $C_1, C_n$  les colonnes de  $Gram(u_1, \dots, u_n)$ .

Alors :  $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$ , donc  $(C_1, \dots, C_n)$  liée.

Donc  $\text{rg}(Gram(u_1, \dots, u_n)) < n$ .

Ainsi  $Gram(u_1, \dots, u_n)$  n'est pas inversible.

D'où  $G(u_1, \dots, u_n) = 0$ .

2. (a) Soit  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$u_j = \sum_{k=1}^n a_{k,j} e_k.$$

Donc :

$$\begin{aligned} (u_i | u_j) &= \left( \sum_{l=1}^n a_{l,i} e_l \mid \sum_{k=1}^n a_{k,j} e_k \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{l,i} a_{k,j} (e_l | e_k) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{l,i} a_{k,j} \delta_{l,k} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} \end{aligned}$$

D'où :

$$(u_i | u_i) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,i}.$$

(b) Posons  $A^T \cdot A = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  Soient  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = (u_i | u_j)$$

Donc :

$$A^T \cdot A = Gram(u_1, \dots, u_n).$$

(c)

$$G(u, \dots, u_n) = \det(A^T \cdot A) = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A)^2.$$

Comme  $A$  est une matrice de passage,  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  donc  $\det A \neq 0$ . Ainsi  $G(u_1, \dots, u_n) > 0$ .

3. (a) Voir cours.

(b) •

$$G(e_1, \dots, e_p, x) = G(e_1, \dots, e_p, x_F + n) = \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x_F) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_p | e_1) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x_F) \\ (x_F | e_1) & \cdots & (x_F | e_p) & \|x_F\|^2 + \|n\|^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{car } (x | x) = (x_F + n | x_F + n) = \|x_F\|^2 + 2(n | x_F) + \|n\|^2 = \|x_F\|^2 + \|n\|^2.$$

En utilisant la linéarité par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned} G(e_1, \dots, e_p, x) &= \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_p | x_F) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_p | e_1) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x_F) \\ (x_F | e_1) & \cdots & (x_F | e_p) & \|x_F\|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_p | e_1) & \cdots & (e_p | e_p) & 0 \\ (x_F | e_1) & \cdots & (x_F | e_p) & \|n\|^2 \end{vmatrix} \\ &= G(e_1, \dots, e_p, x_F) + \|n\|^2 G(e_1, \dots, e_p) \end{aligned}$$

Or  $(e_1, \dots, e_p, x_F)$  est liée, donc, d'après 1 :  $G(e_1, \dots, e_p, x_F) = 0$ . Ainsi :

$$G(e_1, \dots, e_p, x_F) = \|n\|^2 G(e_1, \dots, e_p).$$

- Comme  $(e_1, \dots, e_p)$  est libre,  $G(e_1, \dots, e_p) \neq 0$  donc :

$$\|n\|^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_p, x)}{G(e_1, \dots, e_p)}.$$

Donc, comme  $d(x, F) = \|x\|$ , on a :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(e_1, \dots, e_p, x)}{G(e_1, \dots, e_p)}}$$

### Partie 3 :

- $\varphi$  est clairement bilinéaire et symétrique.
  - Soit  $P \in \mathbb{R}[x]$   $\varphi(P, P) = \int_0^1 P(t)^2 dt \geq 0$  et  $\varphi(P, P) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 P(t)^2 dt = 0$ , or  $P^2$  est continue et positive donc :

$$\varphi(P, P) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], P(t) = 0 \Leftrightarrow P = 0$$

car P admet une infinité de racines.

- Ainsi  $\varphi$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

- (a)

$$\begin{aligned} d &= \inf_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \int_0^1 (t^2 - P(t))^2 dt \\ &= \lim_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \|x^2 - P\|^2 \\ &= d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2 \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{array} \right| &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{array} \right| &= \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{27} - \frac{1}{16} - \frac{1}{20} \\ &= \dots = \frac{1}{2160} \end{aligned}$$

- (c)  $(1, X)$  est une base de  $\mathbb{R}_1[X]$ , donc, d'après II.3.b,  $d = \frac{G(1, X, X^2)}{G(1, X)}$ . Or :

$$\begin{aligned} (1 | 1) &= 1 & (X | X^2) &= \frac{1}{4} \\ (1 | X) &= \frac{1}{2} & (X | X) &= \frac{1}{3} \\ (1 | X^2) &= \frac{1}{3} & (X^2 | X^2) &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } G(1, X) = \left| \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{12}$$

$$G(1, X, X^2) = \left| \begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{array} \right| = \frac{1}{2160}$$

Donc :

$$d = \frac{\frac{1}{2160}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{180}.$$

### Partie 4 :

- On a  $\forall i \in [[1, p-1]]$ ,  $F(a_i) = 0$ , donc en développant  $D$  par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned} D &= F(a_p) \left| \begin{array}{cc} \frac{i}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_{p-1}} \\ \frac{i}{a_{p-1}+b_1} & \dots & \frac{1}{a_{p-1}+b_{p-1}} \end{array} \right| \\ &= F(a_p) C_{p-1}(a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1}). \end{aligned}$$

- On a :  $\forall i \in [[1, p]]$ ,  $F(a_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{a_i+b_j}$  Donc, en notant  $C_1, \dots, C_p$  les colonnes de  $D$  :

$$C_p = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j C_j + \lambda_p \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_p} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_p+b_p} \end{pmatrix}$$

Donc, en effectuant l'opération  $C_p \leftarrow C_p - \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j C_j$ , on a :

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{p-1}} & \lambda_p \frac{1}{a_1+b_p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_p+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p+b_{p-1}} & \frac{\lambda_p}{a_p+b_p} \end{vmatrix} \\ = \lambda_p C_p(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n).$$

Comme :  $\lambda_p = \prod_{j=1}^{p-1} \frac{a_j + b_p}{b_p - b_j}$ , on a :

$$F(a_p) C_{p-1}(a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1}) = \frac{\prod_{j=1}^{p-1} (a_j + b_p)}{\prod_{j=1}^{p-1} (b_p - b_j)} C_p(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p).$$

2. Montrons le résultat par récurrence sur  $p$ .

- pour  $p = 1$ , on a :  $C_1(a_1, b, 1) = \frac{1}{a_1+b_1}$  et :

$$\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq 1} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq 1} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq 1} (a_i + b_j)} = \frac{1 \times 1}{a_1 + b_1} = C_1(a_1, b_1)$$

- Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ , supposons le résultat vrai pour  $C_p$ .

$$C_{p+1}(a_1, \dots, a_{p+1}, b_1, \dots, b_{p+1}) = F(a_{p+1}) C_p(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) \frac{\prod_{i=1}^p (b_{p+1} - b_i)}{\prod_{i=1}^p (a_i + b_{p+1})} \\ = \frac{\prod_{i=1}^p (a_{p+1} - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq p} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq p} (b_j - b_i)}{\prod_{i=1}^{p+1} (a_{p+1} + b_i) \prod_{1 \leq i, j \leq p} (a_i + b_j)} \\ \times \frac{\prod_{i=1}^p (b_{p+1} - b_i)}{\prod_{i=1}^p (a_i + b_{p+1})} \\ = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p+1} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq p+1} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq p+1} (a_i + b_j)}$$

- On a donc montré par récurrence que :

$$C_p(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq p} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (a_i + b_j)}.$$

3. (a) On a :

$$\Delta_p = C_p(1, \dots, p, 0, \dots, p-1) \\ = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p} (j - i) \prod_{1 \leq i < j \leq p} ((j-1) - (i-1))}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (i + j - 1)} \\ = \frac{(\prod_{1 \leq i < j \leq p} (j - i))^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (i + j - 1)}$$

(b)

$$u_n = d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X])^2 \\ = \frac{G(1, X, \dots, X^{n-1}, X^n)}{G(1, X, \dots, X^{n-1})}$$

Or, si  $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$(X^i | X^j) = \int_0^1 t^{i+j} dt = \frac{1}{i+j+1}$$

Donc :

$$G(1, X, \dots, X^n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{vmatrix} = \Delta_{n+1}$$

et  $G(1, X, \dots, X^{n-1}) = \Delta_n$  Donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = \frac{\prod_{1 < i < j \leq n+1} (j-i)^2}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i)^2} \times \frac{\prod_{1 < i, j \leq n} (i+j-1)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n+1} (i+i-1)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n (n+1-i)^2}{\prod_{i=1}^n (i+n) \cdot \prod_{j=1}^n (j+n) \cdot (2n+1)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n i^2}{\prod_{i=n+1}^{2n} i^2 \cdot (2n+1)} = \frac{(n!)^2}{\frac{(2n)!}{(n!)^2} (2n+1)} \end{aligned}$$

Donc :

$$u_m = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}.$$

(c) On a :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_m &\leq \left( \frac{1 \times 2 \times \dots \times n}{(n+1) \times (n+2) \times \dots \times (2n)} \right) \cdot \frac{1}{2n+2} \\ &\leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+2} \times \dots \times \frac{n}{2n} \cdot \frac{1}{2n+2} \\ &\leq 1 \cdot 1 \times \dots \times 1 \cdot \frac{1}{2n+2} \\ &\leq \frac{1}{2n+2} \end{aligned}$$

Donc, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$