

Polynômes d'interpolation de Lagrange

Problème 1 :

1. (a) Comme $\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_i - a_j) \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\deg L_i = \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} 1 = n - 1.$$

- (b) Soient $i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- si $i \neq k$, alors :

$$L_i(a_k) = \frac{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_k - a_j)}{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_i - a_j)} = \frac{(a_k - a_k) \prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, k\}} (a_k - a_j)}{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_i - a_j)} = 0.$$

- si $i = k$, alors :

$$L_i(a_k) = \frac{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_k - a_j)}{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_i - a_j)} = \frac{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_k - a_j)}{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_k - a_j)} = 1.$$

Donc :

$$L_i(a_k) = \delta_{i,k}.$$

- (c) • Analyse : Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$P(a_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(a_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{i,k} = \lambda_k.$$

Donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = P(a_k).$$

- Synthèse : posons $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = P(a_k)$.

Soit $Q = P - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$.

- Comme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$Q(a_k) = P(a_k) - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(a_k) = P(a_k) - \lambda_k = 0.$$

- Ainsi Q admet au moins n racines distinctes et $\deg(Q) \leq n - 1$. Donc $Q = 0$. D'où :

$$P = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i.$$

- Ainsi : il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$ et :

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (P(a_1), \dots, P(a_n)).$$

- (d) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'après la question précédente, $P = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$. Donc :

$$(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_k) = x_k) \iff P = \sum_{i=1}^n x_i L_i,$$

d'après l'unicité des coefficients de la décomposition.

Ainsi : il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_k) = x_k$ et on a : $P = \sum_{i=1}^n x_i L_i$.

- (e) i. $a_1, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts, donc, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i$ est racine simple de Φ . Ainsi :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \Phi'(a_i) \neq 0.$$

ii. On a :

$$P = \sum_{i=1}^n x_i L_i = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\prod_{j \in [1, n] \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\prod_{j \in [1, n] \setminus \{i\}} (a_i - a_j)}.$$

Or $\Phi = (X - a_i) \prod_{j \in [1, n] \setminus \{i\}} (X - a_j)$, donc :

$$\Phi' = \prod_{j \in [1, n] \setminus \{i\}} (X - a_j) + (X - a_i) \left(\prod_{j \in [1, n] \setminus \{i\}} (X - a_j) \right)'.$$

Ainsi

$$\Phi'(a_i) = \prod_{j \in [1, n] \setminus \{i\}} (a_i - a_j).$$

Donc :

$$P = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\prod_{j \in [1, n] \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\Phi'(a_i)}.$$

2. Comme $|f|$ est une fonction continue sur le segment $[-1, 1]$, d'après le théorème des bornes atteintes, $|f|$ admet un maximum.

3. (a) i. $\varphi(t) = 0 \iff f(t) - P(t) - \lambda \Phi(t) = 0 \iff \lambda \varphi(t) = f(t) - P(t)$
Or $t \in [-1, 1] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, donc $\Phi(t) \neq 0$, ainsi :

$$\lambda = \frac{f(t) - P(t)}{\Phi(t)} \text{ convient.}$$

- ii. • – Soit $i \in [1, n]$, on a : $\varphi(a_i) = f(a_i) - P(a_i) - \lambda \Phi(a_i) = 0$.
– $\varphi(t) = 0$
Donc φ s'annule en $a_1, \dots, a_n, t \in [0, 1]$ ainsi φ s'annule $n+1$ fois au moins sur $[-1, 1]$.
• Soient $-1 \leq b_1 < \dots < b_{n+1} \leq 1$ tels que φ s'annule en b_j pour tout $j \in [1, n+1]$.
Soit $j \in [1, n]$, φ est continue sur $[b_j, b_{j+1}]$, dérivable sur $]b_j, b_{j+1}[$ et $\varphi(b_j) = \varphi(b_{j+1})$. Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_j \in]b_j, b_{j+1}[$ tel que $\varphi'(c_j) = 0$. Comme $-1 \leq c_1 < \dots < c_n \leq 1$, φ' s'annule au moins n fois sur $[-1, 1]$.
iii. Par récurrence, pour tout $k \in [0, n]$, $\varphi^{(k)}$ s'annule au moins $n+1-k$ fois sur $[-1, 1]$ donc $\varphi^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[-1, 1]$.
iv. • On a : $\forall x \in [-1, 1], \varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x) - \lambda \Phi^{(n)}(x)$.
Donc : $\varphi^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - P^{(n)}(a) - \lambda \Phi^{(n)}(a)$.
Or $\varphi^{(n)}(a) = 0$ donc :

$$f^{(n)}(a) - P^{(n)}(a) - \lambda \Phi^{(n)}(a) = 0.$$

- On a $\deg P \leq n-1$ donc $P^{(n)} = 0$ ainsi :

$$f^{(n)}(a) = \lambda \Phi^{(n)}(a).$$

- $\Phi = X^n + R$ avec $\deg R \leq n-1$ donc $\Phi^{(n)} = (X^n)^{(n)} + R^{(n)}$.

Or $\deg R \leq n-1$ donc $R^{(n)} = 0$ et :

$$(X^n)^{(n)} = \frac{n!}{(n-n)!} X^{n-n} = n!$$

Donc :

$$\Phi^{(n)} = n!$$

- D'où : $f^{(n)}(a) = \lambda n!$ donc $\lambda = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Or : $\lambda = \frac{f(t) - P(t)}{\Phi(t)}$, ainsi :

$$f(t) - P(t) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \Phi(t).$$

(b) Soit $t \in [-1, 1]$.

- Si $t \in \{a_1, \dots, a_n\}$ alors :

$$|f(t) - P(t)| = 0 \leq \frac{M_n}{n!} |\Phi(t)|.$$

- Si $t \in [-1, 1] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ alors :

$$|f(t) - P(t)| = \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} |\Phi(t)| \leq \frac{M_n}{n!} |\Phi(t)|.$$

- Dans tous les cas :

$$|f(t) - P(t)| \leq \frac{M_n}{n!} |\Phi(t)|.$$

On a majoré l'erreur commise en approchant $f(t)$ par $P(t)$.