

# Correction : Formule de Stirling

1. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \\
 &= \ln \left( \frac{(n+1)!}{n!} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \left( \frac{e}{n+1} \right)^{n+1} \left( \frac{n}{e} \right)^n \right) \\
 &= \ln \left( (n+1) \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} e \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= \ln \left( e \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n+1/2} \right) \\
 &= 1 + \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln \left( \frac{n}{n+1} \right) \\
 &= 1 - \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \\
 &= 1 - \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\
 &= 1 - \left( 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\
 &= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
 &\sim -\frac{1}{12n^2}
 \end{aligned}$$

(b)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $-\frac{1}{12n^2}$  donc  $\sum (v_{n+1} - v_n)$  et  $\sum -\frac{1}{12n^2}$  sont de même nature.

Or  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente, ainsi  $\sum (v_{n+1} - v_n)$  converge.

Or  $\sum (v_{n+1} - v_n)$  est une série télescopique donc  $(v_n)$  converge.

(c) Posons  $l = \lim v_n$ , alors  $\lim u_n = e^l \neq 0$ . Donc :

$$u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left( \frac{e}{n} \right)^n \sim e^l.$$

Posons  $k = e^l > 0$ , alors :

$$n! \sim k\sqrt{n} \left( \frac{n}{e} \right)^n.$$

2. (a) i. •  $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}$   
 •  $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1$   
 ii. Soit  $n \geq 2$ . On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \sin^{n-1}(t) & u'(t) &= (n-1) \cos(t) \sin^{n-2}(t) \\
 v'(t) &= \sin(t) & v(t) &= -\cos(t)
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 I_n &= [-\cos(t) \sin^{n-1}(t)]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^{n-2}(t) dt \\
 &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(t)) \sin^{n-2}(t) dt \\
 &= (n-1)(I_{n-2} - I_n).
 \end{aligned}$$

Donc  $nI_n = (n-1)I_{n-2}$  et ainsi :

$$\forall n \geq 2, I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

iii. Soit  $p \in \mathbb{N}$ .

• Soit  $k \in [1, p]$ , on a :

$$\frac{I_{2k}}{I_{2(k-1)}} = \frac{2k-1}{2k},$$

donc :

$$\prod_{k=1}^p \frac{I_{2k}}{I_{2(k-1)}} = \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k}.$$

Ainsi, par produit télescopique :

$$\frac{I_{2p}}{I_0} = \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k} = \prod_{k=1}^p \frac{(2k-1)(2k)}{(2k)^2} = \frac{\prod_{k=1}^p (2k-1)(2k)}{\prod_{k=1}^p (2k)^2} = \frac{(2p)!}{(2^p \prod_{k=1}^p k)^2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}.$$

Ainsi :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

iv. De même :

$$\frac{I_{2p+1}}{I_1} = \prod_{k=1}^p \frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^p \frac{(2k^2)}{(2k)(2k+1)} = \frac{\prod_{k=1}^p (2k^2)}{\prod_{k=1}^p (2k)(2k+1)} = \frac{(2^p \prod_{k=1}^p k)^2}{(2p+1)!} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Ainsi :

$$I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

- (b) i. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , on a :  $0 \leq \sin t \leq 1$ . Donc :  $\sin^{2p+1}(t) \leq \sin^{2p}(t) \leq \sin^{2p-1}(t)$ .  
Donc, par croissance de l'intégrale :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}.$$

ii. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p}.$$

Donc, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1.$$

iii. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)!}{(2^p p!)^2} = \left( \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \right)^2 (2p+1) \frac{\pi}{2}.$$

Or  $\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \sim 1$  donc  $\left( \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \right)^2 (2p+1) \frac{\pi}{2} \sim 1$ . D'où, comme  $2p+1 \sim 2p$ , on a :

$$\frac{1}{p} \left( \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \sim \pi.$$

3. D'après 1.e :

$$\frac{1}{p} \left( \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \sim \frac{1}{p} \left( \frac{2^{2p} k^2 p \left(\frac{p}{e}\right)^{2p}}{k \sqrt{2p} \left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}} \right)^2 = \frac{1}{p} \left( k \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2.$$

Donc :

$$\frac{1}{p} \left( \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \sim \frac{k^2}{2}.$$

4. Ainsi  $\frac{k^2}{2} = \pi$  donc  $k = \sqrt{2\pi}$ , d'où :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

5. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \left( k \ln \frac{2k+1}{2k-1} - 1 \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n k (\ln(2k+1) - \ln(2k)) - n \\
 &= \sum_{k=1}^n ((k+1) \ln(2k+1) - k \ln(2k)) - \sum_{k=1}^n \ln(2k+1) - n \\
 &= (n+1) \ln(2n+1) - \sum_{k=1}^n \ln(2k+1) - n \\
 &= \ln(2n+1)^{n+1} - \ln \prod_{k=1}^n (2k+1) - n \\
 &= \ln(2n+1)^{n+1} - \ln \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!} - \ln(e^n) \\
 &= \ln \left( \frac{(2n+1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot n!}{(2n+1)! e^n} \right) \\
 &= \ln \left( \frac{(2n+1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2n)! e^n} \right)
 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
 \frac{(2n+1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2n)! e^n} &\sim \frac{(2n+1)^n \cdot 2^n \cdot \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{2n}} \\
 &\sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(2n+1)^n}{\left(\frac{2n}{e}\right)^n e^n} \\
 &\sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2}} e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}
 \end{aligned}$$

Or  $n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \sim \frac{1}{2}$  donc :

$$\lim \frac{(2n+1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2n)! e^n} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{1/2}.$$

D'où :

$$\lim \sum_{k=1}^n u_k = \ln \frac{1}{\sqrt{2}} e^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2).$$

Ainsi  $\sum u_n$  converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2).$$