Correction du mini-problème :
Déterminant

1. (a) $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base donc f est bien définie.

   (b)
   - Méthode 1 (avec déterminant) :
   $$\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 & 0 \\ 1-n & 2-n & \dots & (n-1)-n & n \end{vmatrix} = n!,$$
   car il s'agit du déterminant d'une matrice triangulaire.
   Ainsi $\det(f) \neq 0$ donc f est bijective.
   - Méthode 2 (sans déterminant) :
   Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Supposons que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0$. Alors :
   $$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (i e_i + (i-n)e_n) + \lambda_n n e_n = 0.$$
   Or : $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (i e_i + (i-n)e_n) + \lambda_n n e_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i i e_i + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (i-n) + \lambda_n n\right) e_n$. Donc :
   $$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i i e_i + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (i-n) + \lambda_n n\right) e_n = 0.$$
   Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, on a :
   $$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \lambda_i i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (i-n) + \lambda_n n = 0.$$
   Donc : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\lambda_i = 0$ et $0 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (i-n) + \lambda_n n = \lambda_n n$ ainsi $\lambda_n = 0$. D'où :
   $$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = 0.$$
   Ainsi $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre.
   Comme $\mathrm{Card}\,((f(e_1), \dots, f(e_n)) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
   Ainsi, l'image de la base $\mathcal{B}$ par f est une base de $\mathbb{R}^n$ donc f est bijective.

2. (a)
   - Méthode 1 (avec déterminant) :
   $$\det{}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$
   car il s'agit du déterminant d'une matrice triangulaire.
   Ainsi $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \neq 0$ donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
   - Méthode 2 (sans déterminant) :
   Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Supposons que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. Alors :
   $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i + e_n) = 0.$$
   Or : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i + e_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i + (\lambda_n + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i) e_n$. Donc :
   $$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i + (\lambda_n + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i) e_n = 0.$$

Comme $(e_1,\dots,e_n)$ est libre, on a :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!] \,,\, \lambda_i = 0 \text{ et } (\lambda_n + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i) = 0.$$

Donc : $0 = (\lambda_n + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i) = 2\lambda_n$ ainsi $\lambda_n = 0$. D'où :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \,,\, \lambda_i = 0.$$

Ainsi $(f_1,\dots,f_n)$ est libre.
Comme $\operatorname{Card}((f_1,\dots,f_n) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$, $(f_1,\dots,f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
Ainsi, $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

(b)

$$P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) On a : $f_n = 2e_n$ donc $e_n = \frac{1}{2} f_n$.
De plus, soit $i \in [\![1, n-1]\!]$, $e_i = f_i - e_n = f_i - \frac{1}{2} f_n$.
Or $P^{-1} = Pass(\mathcal{C},\mathcal{B}) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \dots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. (a)

$$\det(A) = \det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 & 0 \\ 1-n & 2-n & \dots & (n-1)-n & n \end{vmatrix} = n!$$

(b) On a $\det(B) = \det(f) = \det(A)$ donc :

$$\det(B) = n!.$$

(c)
- Méthode 1 (sans formules de changement de base) :
  Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on remarque que, dans tous les cas $f(e_i) = ie_i + (i-n)e_n$, ainsi :

  $$f(f_i) = f(e_i) + f(e_n) = ie_i + (i-n)e_n + ne_n = i(e_i + e_n) = if_i.$$

  Donc :

  $$B = diag(1, 2, \dots, n).$$

- Méthode 2 (avec formules de changement de base) :

$$\begin{aligned} B &= \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = Pass(\mathcal{C},\mathcal{B}) \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) Pass(\mathcal{B},\mathcal{C}) = P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \dots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 & 0 \\ 1-n & 2-n & \dots & (n-1)-n & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \dots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Donc : $B = diag(1, 2, \dots, n)$.