Corrections :
vacances de Noël

Problème 1 : Matrices magiques

1. Posons $MV = (a_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M^T V = (b_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Soit $i \in [\![1,n]\!]$, on a :
$$a_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} 1 = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \text{ et } b_i = \sum_{j=1}^{n} m_{j,i} 1 = \sum_{j=1}^{n} m_{j,1}.$$
$$\begin{aligned} M \text{ semi-magique ssi } & \exists \sigma(M), \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \sigma(M) \text{ et } \sum_{j=1}^{n} m_{j,i} = \sigma(M), \\ \text{ssi } & \exists \sigma(M), \forall i \in [\![1,n]\!], a_i = \sigma(M) \text{ et } b_i = \sigma(M), \\ \text{ssi } & \exists \sigma(M), \ MV = \sigma(M) V \text{ et } M^T V = \sigma(M) V, \\ \text{ssi } & V \text{ est un vecteur propre de } M \text{ et } M^T \text{ associé à la même valeur propre.} \end{aligned}$$

2. (a)
   - Soit $M = (m_{i,j}) \in SM_n$, soit $N = (n_{i,j}) \in SM_n$. Posons $\sigma(\lambda M + \mu N) = \lambda\sigma(M) + \mu\sigma(N)$.
     Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$,
$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda m_{i,j} + \mu n_{i,j}) = \lambda \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} + \mu \sum_{j=1}^{n} n_{i,j} = \lambda\sigma(M) + \mu\sigma(N) = \sigma(\lambda M + \mu N).$$
$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda m_{i,j} + \mu n_{i,j}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} + \mu \sum_{i=1}^{n} n_{i,j} = \lambda\sigma(M) + \mu\sigma(N) = \sigma(\lambda M + \mu N).$$
     Donc $\lambda M + \mu N \in SM_n$.
   - Soit $M = (m_{i,j}) \in MG_n$, soit $N = (n_{i,j}) \in MG_n$. Posons $\sigma(\lambda M + \mu N) = \lambda\sigma(M) + \mu\sigma(N)$. D'après le point précédent : $\lambda M + \mu N \in SM_n$.
     Soit $i \in [\![1,n]\!]$,
$$\mathrm{tr}(\lambda M + \mu N) = \lambda \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} n_{i,i} = \lambda\sigma(M) + \mu\sigma(N) = \sigma(\lambda M + \mu N).$$
$$\begin{aligned} \sum_{i,j\in[\![1,n]\!], i+j=n+1} (\lambda m_{i,j} + \mu n_{i,j}) &= \lambda \sum_{i,j\in[\![1,n]\!], i+j=n+1} m_{i,j} + \mu \sum_{i,j\in[\![1,n]\!], i+j=n+1} n_{i,j} \\ &= \lambda\sigma(M) + \mu\sigma(N) = \sigma(\lambda M + \mu N). \end{aligned}$$
     Donc $\lambda M + \mu N \in MG_n$.

   (b) Soit $M = (m_{i,j}) \in SM_n$, soit $N = (n_{i,j}) \in SM_n$.
   Posons $MN = (a_{i,j})$.
   On a : $\forall i, j \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} n_{k,j}$.
   - Soit $i \in [\![1,n]\!]$,
$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} n_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} \left(\sum_{j=1}^{n} n_{k,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} \sigma(N) = \sigma(M)\sigma(N).$$

- Soit $j \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\left(n_{k,j}\sum_{i=1}^{n} m_{i,k}\right) = \sum_{k=1}^{n} n_{k,j}\sigma(M) = \sigma(N)\sigma(M).$$

  Donc, en posant $\sigma(MN) = \sigma(M)\sigma(N)$, on a : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sigma(MN)$ et $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sigma(MN)$.

  Donc MN est semi-magique.

3. - Posons $\sigma(E) = n$.
     - Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} e_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} 1 = n = \sigma(E)$.
     - Soit $j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} e_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n = \sigma(E)$.
     - $\mathrm{tr}(E) = \sum_{i=1}^{n} e_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n = \sigma(E)$.
     - $\sum_{i,j\in[\![1,n]\!],i+j=n+1} e_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} e_{i,n+1-i} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n = \sigma(E)$.

   Donc E est magique.
   - - Pour $p = 1$, $E^p = E = n^{p-1}E$.
     - Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que $E^p = n^{p-1}E$.
       Alors $E^{p+1} = E^p.E = n^{p-1}E^2 = n^{p-1}.nE = n^pE$.
     - Ainsi, par récurrence :

$$\forall p \geq 1,\ E^p = n^{p-1}E.$$

4. Soit $M = (m_{i,j}) \in SM_n$.

$$EM = \left(\sum_{k=1}^{n} e_{i,k}m_{k,j}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} m_{k,j}\right) = (\sigma(M)) = \sigma(M)E,$$

$$ME = \left(\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}e_{k,j}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\right) = (\sigma(M)) = \sigma(M)E.$$

   Donc :

$$EM = \sigma(M)E = ME.$$

5. (a)
   - Si $c \neq 0$, $M^3 + aM^2 + bM + cI_3 = 0$. Donc $M^3 + aM^2 + bM = -cI_3$. Ainsi $M(M^2 + aM + bI_3) = -cI_3$. Donc $M(\frac{-1}{c}(M^2 + aM + bI_3)) = I_3$.
     Ainsi M est inversible (et $M^{-1} = \frac{-1}{c}(M^2 + aM + bI_3)$).
   - On a $\sigma(M) = \mathrm{tr}(M) = 0$, donc d'après la question précédente $EM = 0$, ainsi $EMM^{-1} = 0$ d'où $E = 0$ ce qui est absurde. Donc : $c = 0$.
   - On a $c = 0$ et $a = -\mathrm{tr}(M) = 0$. Donc $M^3 + bM = 0$.
     Posons $\lambda = -b$, alors : $M^3 = \lambda M$.
   - Montrons que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $M^{2p+1} = \lambda^p M$.
     - Pour $p = 0$, $M^{2p+1} = M = \lambda^p M$.
     - Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que $M^{2p+1} = \lambda^p M$.
       Alors :

$$M^{2(p+1)+1} = M^{2p+1}.M^2 = (\lambda^p M).M^2 = \lambda^p M^3 = \lambda^p.\lambda M = \lambda^{p+1}M.$$

     - Ainsi, par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}$, $M^{2p+1} = \lambda^p M$.
   - Comme M est magique, alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $M^{2p+1} = \lambda^p M$ est magique.
     Donc pour tout entier p impair, M^p est magique.

   (b)
   - On a : $M^p = \left(M_0 + \frac{1}{3}\mathrm{tr}(M)E\right)^p$. Or, d'après 4. $EM = ME$ donc $M_0E = EM_0$, ainsi, d'après la formule du binôme de Newton :

$$M^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} M_0^k\left(\frac{1}{3}\mathrm{tr}(M)E\right)^{p-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\frac{1}{3^{p-k}}\mathrm{tr}(M)^{p-k}M_0^kE^{p-k} \qquad = \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}\frac{1}{3^{p-k}}\mathrm{tr}(M)^{p-k}n^{p-k-1}M_0^kE + M_0^p.$$

   - Montrons que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M_0^kE = \sigma(M_0)^kE$.
     - Pour $k = 0$, $M_0^kE = E = \sigma(M_0)^kE$.
     - Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $M_0^kE = \sigma(M_0)^kE$.
       Comme $M, E \in SM_n$, on a : $M_0 \in SM_n$ donc :

$$M_0^{k+1}E = M_0^k.M_0E = \sigma(M_0)M_0^kE = \sigma(M_0).\sigma(M_0)^kE = \sigma(M_0)^{k+1}E.$$

     - Donc, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M_0^kE = \sigma(M_0)^kE$.

- Ainsi :

$$M^p = \sum_{k=0}^{p-1} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \frac{1}{3^{p-k}} \mathrm{tr}(M)^{p-k} n^{p-k-1} \sigma(M_0)^k E + M_0^p.$$

- Comme E est magique, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \frac{1}{3^{p-k}} \mathrm{tr}(M)^{p-k} n^{p-k-1} \sigma(M_0)^k E$ est magique.
- M_0 est magique et $\mathrm{tr}(M_0) = \mathrm{tr}(M) - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(M).\mathrm{tr}(E) = \mathrm{tr}(M) - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(M).3 = 0$, donc, d'après la question précédente, M_0^p est magique pour p impair.
- Ainsi, si p est impair, M^p est magique.

6. (a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_4.$$

(b)
- Pour $p = 0$,posons $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, alors $A^p = I_4 = a_p A + b_p I_4$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe deux entiers positifs a_p et b_p tels que : $A^p = a_p A + b_p I_4$.

$$A^{p+1} = A.A^p = a_p A^2 + b_p A = a_p(A + 2I_4) + b_p A = (a_p + b_p)A + 2a_p I_4.$$

Posons $a_{p+1} = a_p + b_p$ et $b_{p+1} = 2a_p$. Alors a_{p+1} et b_{p+1} sont deux entiers positifs tels que $A^{p+1} = a_{p+1}A + b_{p+1}B$.
- Donc, par récurrence,pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers positifs a_p et b_p tels que : $A^p = a_p A + b_p Id$.

(c) Soit $p \geq 2$, supposons A^p magique. Alors, comme A est magique, $A^p - a_p A$ est magique. Donc $b_p I_4$ est magique.
Or $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ et $a_2 = 1 > 0$, $b_2 = 2 > 0$. De plus : $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{p+1} = a_p + b_p$ et $b_{p+1} = 2a_p$, donc, par récurrence immédiate : $\forall p \geq 2$, $b_p > 0$.
Ainsi I_4 est magique, ce qui est absurde.
Donc A^p n'est pas magique.

Problème 2 : Autour du théorème de Césaro

1. (a)
   - Pour $n=2$, $x_2 = \frac{2}{3}$ donc $0 < x_2 < 1$.
   - Soit $n \geq 2$, supposons que $0 < x_n < 1$. Alors :
   $$x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} > 0.$$
   et :
   $$x_{n+1} - 1 = \frac{x_n(1+x_n)-(1+2x_n)}{1+2x_n} 1 = \frac{x_n^2 - x_n - 1}{1+2x_n}.$$
   Or le discriminant associé à $x^2 - x - 1 = 0$ est $\Delta = 5$ et ses racines sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
   Or : $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < x_n < 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc : $x_n^2 - x_n - 1 > 0$, ainsi $x_{n+1} - 1 > 0$.
   Donc : $0 < x_{n+1} < 1$.
   - On a donc prouvé par récurrence que :
   $$\forall n \geq 2, 0 < x_n < 1.$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(1+x_n) - x_n(1+2x_n)}{1+2x_n} = \frac{-x_n^2}{1+2x_n} \leq 0.$$
   Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   (c)
   - La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0 donc (x_n) converge vers $l \in [0,1]$.
   - Par passage à la limite, on a donc : $l = \frac{l(1+l)}{1+2l}$. Or :
   $$l = \frac{l(1+l)}{1+2l} \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } 1 = \frac{1+l}{1+2l} \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } 1+2l = 1+l \Leftrightarrow l = 0.$$
   Donc (x_n) converge vers 0.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1+2x_n}{x_n(1+x_n)} - \frac{1}{x_n} = \frac{1+2x_n-(1+x_n)}{x_n(1+x_n)} = \frac{1}{x_n+1}.$$

   (e) Comme $\lim x_n = 0$, on a : $\lim \frac{1}{x_n+1} = 1$.
   Ainsi $\lim u_n = 1$.

   (f)
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k}\right).$$
   Donc, par sommes télescopiques :
   $$v_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_1}\right).$$
   - Comme $\lim u_n = 1$, par théorème de Césaro, $\lim v_n = 1$.
   Or, soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_n = \frac{1}{nx_{n+1}} - \frac{1}{n}$.
   Donc : $\frac{1}{nx_{n+1}} = v_n + \frac{1}{n}$, ainsi : $\lim \frac{1}{nx_{n+1}} = 1$ donc $\lim nx_{n+1} = 1$.
   Or $\lim x_{n+1} = 0$, d'où $\lim(n+1)x_{n+1} = 1$.
   Ainsi :
   $$\lim_{n\to+\infty} nx_n = 1.$$

2. (a) Posons $l = \lim x_n$, alors $\lim(x_{n+1} - x_n) = l - l = 0$.
   Donc la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

   (b) i. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = x_{n+1} - x_n$.
   Alors, comme $\lim u_n = l$, on a, d'après le théorème de Césaro : $\lim v_n = l$.
   Or, soit $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{n}(x_{n+1} - x_1),$$
   par somme télescopique.
   Ainsi : $\lim \frac{1}{n}(x_{n+1} - x_1) = l$.
   Or $\lim \frac{x_1}{n} = 0$, d'où $\lim \frac{x_{n+1}}{n} = l$.
   De plus, $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ donc, par produit : $\lim \frac{x_{n+1}}{n+1} = l$.
   Donc :
   $$\lim \frac{x_n}{n} = l.$$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $x_n = \frac{x_n}{n}.n$.
Or $\lim \frac{x_n}{n} = l \neq 0$ et $\lim n = +\infty$ donc :

$$\lim x_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } l > 0 \\ -\infty & \text{si } l < 0. \end{cases}$$

iii. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \ln n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_{n+1} - x_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Donc $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$ et (x_n) diverge.
Ainsi, dans le cas où $l = 0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement convergente.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \frac{1}{n}\,\frac{-1+(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{-1+(-1)^{n+1}}{2n}.$$

Ainsi, comme $(-1+(-1)^{n+1})$ est bornée et $\lim \frac{1}{2n} = 0$, on a :

$$\lim v_n = 0.$$

(b) On a (v_n) qui converge et (u_n) qui n'a pas de limite. Ainsi la réciproque du théorème de Césaro est fausse.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme (u_n) est croissante, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_{n+1} = (2n-(n+1)+1)u_{n+1} = nu_{n+1}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k\right) = \frac{1}{n}\left(2nv_{2n} - nv_n\right) = 2v_{2n} - v_n.$$

(c)
- (v_n) est convergente donc bornée, ainsi $(2v_{2n} - v_n)$ est bornée. Donc (u_n) est majorée.
- (u_n) est croissante et majorée donc (u_n) converge.
- Posons $l = \lim u_n$, alors, d'après le théorème de Césaro, $\lim v_n = l$ donc :

$$\lim u_n = \lim v_n.$$

(d) On a montré que si (u_n) est croissante, alors la réciproque du théorème de Césaro est vraie.