Exemples du chapitre 10 :
Ensembles et applications

➪ **Exemple 1 :** Montrer que :

$$\{x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0, x < \varepsilon\} =]-\infty, 0].$$

➪ **Exemple 2 :** Déterminer $\mathcal{P}(E)$ pour $E = \{1,2\}$ et $E = \emptyset$.

➪ **Exemple 3 :** Soit E un ensemble, soient A, B, C des parties de E. Montrer que :

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

➪ **Exemple 4 :** Soit E un ensemble, soient A, B, C des parties de E.

1. Montrer que : $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
2. Exprimer $A \setminus (B \setminus C)$ en fonction de $A \setminus B$ et $A \cap C$.
3. On suppose que $A \setminus B = C$. Montrer que $A \cup B = B \cup C$.

➪ **Exemple 5 :** Soit E un ensemble, soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$ l'équation :

$$X \cup A = B.$$

➪ **Exemple 6 :** Posons : $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $A_i = \left[-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right]$. Montrons que :

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} A_i = \{0\} \text{ et } \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i = [-1, 1].$$

➪ **Exemple 7 :** Soient E, F, G des ensembles. Montrer que :

$$(E \times F) \cup (E \times G) = E \times (F \cup G).$$

➪ **Exemple 8 :** Soient A et B des parties de E. Montrer, en utilisant les fonctions indicatrices, que :

$$A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B.$$

➪ **Exemple 9 :** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$.

- Déterminer $f([-1,2])$.
- Déterminer $f^{-1}([-1,2])$.

➪ **Exemple 10 :** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + \frac{1}{z} \end{array}$. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

➪ **Exemple 11 :** Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$, soient $A \in \mathcal{P}(E)$, $B \in \mathcal{P}(F)$. Montrer que :

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \text{ et } f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

➪ **Exemple 12 :** Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de :

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, 2x) \end{array}$.
2. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x) \end{array}$.

➪ **Exemple 13 :** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x) \end{array}$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

➪ **Exemple 14 :** Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective},$$

$$g \circ f \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ surjective}.$$

➪ **Exemple 15 :** Soient $f, g : E \to E$ telles que $f \circ g \circ f = Id_E$. Montrer que f et g sont bijectives et exprimer leurs réciproques.

➪ **Exemple 16 :** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & xe^x \end{array}$.
Montrer que f est bijective.
