Exemples du chapitre 11 :
Suites numériques

➪ **Exemple 1 :** Montrons que : $\lim \dfrac{1}{n} = 0$.

➪ **Exemple 2 :** Soit (u_n) une suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

➪ **Exemple 3 :** Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,\ \text{avec } l < 1.$$

Montrer que : $\lim u_n = 0$.

➪ **Exemple 4 :** Calculer :

- $\lim \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$
- $\lim \dfrac{\sin n^4}{n}$
- $\lim \dfrac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$
- $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
- $\lim \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$
- $\lim \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

➪ **Exemple 5 :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l.
Ce résultat s'appelle le théorème de Césaro.

➪ **Exemple 6 :** Calculer :

- $\lim \dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}$
- $\lim u_n$ avec : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$

➪ **Exemple 7 :** Déterminer, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants :

1. $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$,
2. $B = \left\{\frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

➪ **Exemple 8 :** Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

$$-A = \{-x,\, x \in A\},$$

$$A + B = \{x + y,\, x \in A,\, y \in B\},$$

1. Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.
2. Montrer que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

➪ **Exemple 9 :** On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + e^{-k})$. Montrons que (u_n) converge.

➪ **Exemple 10 :** Etudier la convergence des suites définies par :

1. $u_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.
2. $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{\pi}\mathrm{Arcsin}\,(u_n)$.
3. $u_0 \in \mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.e^{-u_n}$.

➪ **Exemple 11 :** Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :
$u_0 = 0,\ v_0 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

➪ **Exemple 12 :**

- Montrer que $((-1)^n)$ n'a pas de limite.
- Montrer que $(u_n) = (\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)$ n'a pas de limite.

➪ **Exemple 13 :** Etudier la convergence de la suite définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}.$$

➪ **Exemple 14 :** On pose :

$$z_0 \in \mathbb{C} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{1}{3}(2z_n - \overline{z_n}).$$

Etudier la convergence de (z_n).
