Exemples du chapitre 12 :
Calcul matriciel et systèmes linéaires

➪ **Exemple 1 :** Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A - 2B + 3C$.

➪ **Exemple 2 :** Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer AB.

➪ **Exemple 3 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A^2 = aA + bI_3,$$

où : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

➪ **Exemple 4 :** Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ avec :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, p]\!],\ a_{i,j} = j + 1,$$

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ b_{i,j} = i.$$

Calculer AB.

➪ **Exemple 5 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Calculer U^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

➪ **Exemple 6 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

➪ **Exemple 7 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

➪ **Exemple 8 :** Résoudre le système d'inconnues $x, y, z, t \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + 3z - 4t & = & 0 \\ y - z + t & = & -3 \\ x + 3y - 3t & = & 0 \\ -7y + 3z + t & = & -3 \end{array} \right.$$

➪ **Exemple 9 :** Soit $m \in \mathbb{R}$, résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} mx+my+4z & = & 1 \\ 2x+y+mz & = & 1 \\ x+2y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

➪ **Exemple 10 :** On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$. En déduire que A est inversible et la valeur de A^{-1}.

➪ **Exemple 11 :** Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

➪ **Exemple 12 :** On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Inverser P, calculer $P^{-1}AP$ et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
