Exemples du chapitre 13 : Limites et continuité

➪ **Exemple 1 :** Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$
- Soit $n \in \mathbb{Z}$

  $\lim\limits_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor$ et $\lim\limits_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor$

➪ **Exemple 2 :**

- Montrer que cos n'a pas de limite en $+\infty$.
- Montrer que $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

➪ **Exemple 3 :** Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x + 1}{x^2}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x+7}-3}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - \ln(x + \sqrt{x^2-1}))$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} |\ln(x)|^{1/\ln(x)}$

➪ **Exemple 4 :** Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. On suppose que : $\lim\limits_{\infty} f = l \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) < l.$$

➪ **Exemple 5 :** Montrer que $|.|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

➪ **Exemple 6 :** Montrer que :

- $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
- $f : x \mapsto \frac{\cos x}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.
- $f : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

➪ **Exemple 7 :** Etudier la continuité de $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

➪ **Exemple 8 :** Etudier la continuité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor -x^2 \rfloor$ en 0.

➪ **Exemple 9 :** Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

➪ **Exemple 10 :** Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

➪ **Exemple 11 :** Déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Plan d'étude :

- On raisonne par analyse-synthèse.
- On calcule $f(0)$.
- On raisonne par récurrence pour calculer $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- On trouve un lien entre $f(-x)$ et $f(x)$ pour en déduire $f(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
- On utilise les résultats précédents pour calculer $f(r)$ pour $r \in \mathbb{Q}$.
- Comme tout réel est limite d'une suite de rationnels, un argument de continuité permet de calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- On fait la synthèse.

➪ **Exemple 12 :** Soient f et g des fonctions continues qui ne s'annulent pas sur I et telles que $|f| = |g|$. Alors $f = g$ ou $f = -g$.

➪ **Exemple 13 :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, et soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

➪ **Exemple 14 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = f \circ f \circ f \cdots \circ f$ (avec n facteurs).
On suppose que f^n admet un point fixe. Montrer que f admet un point fixe.

➪ **Exemple 15 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.

➪ **Exemple 16 :** Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telles que : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) < g(x)$. Montrer que :

$$\exists m > 0,\ \forall x \in [0,1],\ f(x) + m \leq g(x).$$