Exemples du chapitre 14 : Dérivabilité

➪ **Exemple 1 :** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, soit $f : x \mapsto x^n$. Etudier la dérivabilité de f en a.

➪ **Exemple 2 :** Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ f est-elle dérivable en 0 ?

➪ **Exemple 3 :** Posons : $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$ Etudions la dérivabilité de f en 0.

➪ **Exemple 4 :** Soit $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x}{1+|x|} \end{array}$. Etudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.

➪ **Exemple 5 :** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Ce résultat est le théorème de Darboux.

➪ **Exemple 6 :** Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. On pose :

$$\begin{array}{rccc} g : & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x^4 + x + f(x). \end{array}$$

Montrer qu'il existe $c \in]-1,1[$ tel que $g'(c) = 0$.

➪ **Exemple 7 :** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \exists c \in \mathbb{R}^{+*}, f(2x) = 2xf'(c).$$

➪ **Exemple 8 :** Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y)| \leq |x - y|.$$

➪ **Exemple 9 :** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

➪ **Exemple 10 :** On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\frac{1}{e}, 1].$$

Montrer que (u_n) converge. On note l sa limite. Comment obtenir une valeur approchée de l à 10^{-3} près ?

➪ **Exemple 11 :** Soit $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{x}e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

➪ **Exemple 12 :** Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3.$$

➪ **Exemple 13 :** Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :

$$f : x \mapsto e^{2x}(x+2).$$

➪ **Exemple 14 :** Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :

$$f : x \mapsto \frac{1}{1-x}.$$

➪ **Exemple 15 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$. Montrer que f est convexe.

➪ **Exemple 16 :** Toute fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue.

➪ **Exemple 17 :**

1. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\ln x$. f est convexe.
2. Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $\ln(x) \leq x - 1$

➪ **Exemple 18 :**

1. La fonction $-\sin$ est convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$.
