Exemples du chapitre 15 : Polynômes

➪ **Exemple 1 :** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (X^3 + X^2 + X + 1) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k = X^{2n+3} + X^{2n+1} + X^2 + 1.$$

➪ **Exemple 2 :**
On pose : $P = X^3 - X^2 + 1$ et $Q = X - 5$, calculer :

- $\deg(3P + 5Q)$:
- $\deg(P + X^2.Q)$:
- $\deg(P - X^2.Q)$:
- $\deg(P.Q)$:
- $\deg(P.Q^2)$:
- $\deg(P.(3P + 5Q)^2)$:
- $\deg(P(X^3))$:
- $\deg(P(X^3).Q(X))$:
- $\deg(P(X)^3.Q(X))$:

➪ **Exemple 3 :**
Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$P(X+1) - P(X) = X.$$

➪ **Exemple 4 :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $P = X^4 + X^3 + 3X^2 + aX + b$ et $Q = X^2 + 1$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q.
2. Déterminer a et b tels que $Q|P$.

➪ **Exemple 5 :** Montrer que :

$$X^2 - 2X | (X-1)^4 + (X-1)^2 - 2.$$

➪ **Exemple 6 :** Déterminer tous les P de degré 3 tels que $P(0) = P(1) = P(2) = 0$.

➪ **Exemple 7 :**
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\sum_{k=0}^{n} P^2(k) = 0$. Montrer que $P = 0$.

➪ **Exemple 8 :**

1. On pose : $P = X^4 + 3X^3 + 2X + 5$ et $Q = X^2 - 8X + 1$.
   Calculer les degrés de $P.Q'$, $(P \circ Q)'$, $P' - XQ$, $P' - 4XQ$, $P'' \circ Q$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$ et $Q = X^2 - X + 1$.
   Calculer le degré et le coefficient dominant de $P' \circ Q$.

➪ **Exemple 9 :** Déterminer tous les polynômes P tels que :

$$P(2)=6,\ P'(2)=1,\ P''(2)=4,$$
$$\forall n\geq 3,\ P^{(n)}(2)=0.$$

➪ **Exemple 10 :**
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$, soit $a\in\mathbb{R}$. On pose :

$$Q=\frac{1}{2}(X-a)(P'+P'(a))-P+P(a).$$

Montrer que a est une racine au moins triple de Q.

➪ **Exemple 11 :**

1. Montrer que : $(X^2-4)^2|X^6-9X^4+24X^2-16$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$, montrer que : $(X-1)^2|nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$.

➪ **Exemple 12 :** Soit $n\in\mathbb{N}^*$, factoriser X^n-1 dans $\mathbb{C}[X]$.

➪ **Exemple 13 :**
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

- $P_1=X^3-4X^2+X+6$,
- $P_2=X^3+X^2-2$,
- $P_3=(X^2+1)^2-(X+1)^2$,
- $P_4=(X^2+2)^2+X^2$,
- $P_5=X^8+X^4+1$.

➪ **Exemple 14 :** Déterminer la décomposition en éléments simples de :

1. $F_1=\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$,
2. $F_2=\frac{4X^3}{X^4-1}$.

➪ **Exemple 15 :**

1. Déterminer la décomposition en éléments simples de :
$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)}.$$
2. On pose :
$$f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,0\} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}.\end{array}$$
   (a) Déterminer une primitive de f.
   (b) Déterminer les dérivées n-ièmes de f pour $n\in\mathbb{N}$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, calculer :
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

➪ **Exemple 16 :** Soit $n\in\mathbb{N}^*$, déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ de :

1. $F_n=\dfrac{1}{X^n-1}$,
2. $G_n=\dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$.
