

Exemples du chapitre 16 :

Analyse asymptotique

⇨ **Exemple 1 :** Déterminer un équivalent simple de :

1. $f(x) = \ln(\sqrt{1 + \sin x})$ en $x = 0$,
 2. $f(x) = \sqrt[4]{1 + \tan x} - 1$ en $x = 0$,
 3. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ en $x = 0$,
 4. $f(x) = e^{\cos x} - 1$ en $x = \frac{\pi}{2}$,
 5. $f(x) = \sqrt{x-1} - 1$ en $x = 2$,
 6. $f(x) = \ln(x + x^2)$ en $x = 0$.
-

⇨ **Exemple 2 :** Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x) \sin x}{x^2 + x^3},$
 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos(\sqrt{1+x}-1)} - e}{x^2},$
 3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln((\sin x)^2)}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$
 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x}.$
-

⇨ **Exemple 3 :** Soit $f : x \mapsto x^5 e^x$. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(n)}(0)$.

⇨ **Exemple 4 :** Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \sin x$ à l'ordre 3 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$,
 2. $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 2 au voisinage de 2.
-

⇨ **Exemple 5 :** Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \cos(x) \cdot \text{ch}(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
 2. $f : x \mapsto \sqrt{1+x} \ln(1+x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
-

⇨ **Exemple 6 :** Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto (\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
 2. $f : x \mapsto ((\text{ch } x - \cos x)(\text{sh } x - \sin x))^2$ à l'ordre 11 au voisinage de 0.
-

⇨ **Exemple 7 :** Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \text{Arctan}(x^3)$ à l'ordre 8 au voisinage de 0,
 2. $f : x \mapsto (\cos x)^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
 3. $f : x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4 \sin x}}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0,
 4. $f : x \mapsto \cos(\sin x)$ à l'ordre 6 au voisinage de 0.
-

⇨ **Exemple 8 :** Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
 2. $f : x \mapsto \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2 x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
 3. $f : x \mapsto \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1 + x)}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
-

⇨ **Exemple 9 :** Calculer le développement limité de $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

⇨ **Exemple 10 :** Calculer le développement limité de $\operatorname{Arctan}(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 1.

⇨ **Exemple 11 :** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2},$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x - 2\operatorname{sh}(2x) + \operatorname{sh}(3x)}{\ln(1 + x + 2x^2) + \sqrt{1 - 2x} - 1 - x^2},$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} (2^x + 3^x - 5^x)^{(2^x + 3^x - 2.5^x)^{-1}}.$$

⇨ **Exemple 12 :** Etudier la tangente en 0 et la position relative de la courbe par rapport à sa tangente pour la fonction :

$$x \mapsto 1 + xe^{-x^2}.$$

⇨ **Exemple 13 :** Etudier les éventuelles asymptotes à la courbe représentative de la fonction :

$$x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + 1} e^{-1/x}.$$

⇨ **Exemple 14 :** Soit $f : x \mapsto \operatorname{sh}(x) \sin(x)$. f admet-elle un extremum local en 0?

⇨ **Exemple 15 :** Trouver une suite simple équivalente à :

1. $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n}$,
 2. $u_n = \frac{1 - \cos(\frac{1}{n})}{e^{1/n^2} - 1}$,
-

⇨ **Exemple 16 :** On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$.
 2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2(\sqrt{n+1} - 1) \leq u_n \leq 2(\sqrt{n+1} - \frac{1}{2})$.
 3. En déduire un équivalent de (u_n) .
-

⇨ **Exemple 17 :** Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n + \sqrt{n^2 + 1}} - \sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}).$$

⇨ **Exemple 18 :** Montrer que sh est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et déterminer le développement limité de sh^{-1} en 0 à l'ordre 4.

⇔ **Exemple 19 :** On pose : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n-1 \leq u_n \leq n$.
 2. En déduire : $u_n = n + o(n)$.
 3. En déduire : $u_n = n - \frac{1}{2} + o(1)$.
 4. En déduire : $u_n = n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
-

⇔ **Exemple 20 :** 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $x + \sqrt[3]{x} = n$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que : $x_n = n + o(n)$.
 3. En déduire : $x_n = n - \sqrt[3]{n} + o(\sqrt[3]{n})$.
 4. En déduire : $x_n = n - \sqrt[3]{n} + \frac{1}{3\sqrt[3]{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$.
-

⇔ **Exemple 21 :** On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

1. Montrer que $\lim I_n = 1$.
 2. Montrer que $I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
-

⇔ **Exemple 22 :** 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ que l'on notera x_n .

On définit ainsi une suite $(x_n)_{n \geq 0}$.

2. (a) Montrer que :

$$x_n \sim n\pi$$

- (b) Montrer que :

$$x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$$

3. Montrer que :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
