

Exemples du chapitre 17 :

Espaces vectoriels

⇔ Exemple 1 :

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 0\}$
2. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 1\}$
3. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xy + z = 0\}$
4. $E = \{(x, x, x), x \in \mathbb{R}\}$
5. $E = \{P \in \mathbb{K}[X], P'(2) = 0\}$
6. $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \lim_{+\infty} f = 0\}$

⇔ Exemple 2 :

1. On pose : $E = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 0, -1)$ et $v = (0, 1, -1)$. Déterminer $\text{Vect}(u, v)$.
2. On pose : $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\}$. Ecrire E sous forme d'un sous-espace vectoriel engendré.
3. On pose : $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$. Ecrire E sous forme d'un sous-espace vectoriel engendré.

⇔ Exemple 3 :

- Posons $E = \mathbb{R}^2$, $u = (1, 0)$, $F = \text{Vect}(u)$, $v = (x, y)$ avec $y \neq 0$ et $G = \text{Vect}(v)$. Montrer que :

$$E = F \oplus G.$$

On a montré que F admet une infinité de supplémentaires, il n'y a donc pas unicité du supplémentaire.

- Posons $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(u)$ avec $u = (1, 1, 1)$. Montrer que :

$$E = F \oplus G.$$

- Posons $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(0) = 0\}$ et $G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists \lambda \in \mathbb{R}, f = \lambda\}$. Montrer que :

$$E = F \oplus G.$$

⇔ Exemple 4 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soient A et B des sous-espaces vectoriels de E , soit C un supplémentaire de $A \cap B$ dans B , c'est-à-dire tel que $(A \cap B) \oplus C = B$.

Montrer que A et C sont supplémentaires dans $A + B$.

⇔ Exemple 5 :

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

- Dans $E = \mathbb{R}^3$, $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (1, 0, -1)$, $x_3 = (0, 1, 0)$,
- Dans $E = \mathbb{R}^3$, $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (1, 1, 1)$, $x_3 = (0, 1, 0)$,
- Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto x$, $f_3 : x \mapsto \sin x$.

⇔ Exemple 6 :

1. Posons $E = \mathbb{R}^3$, $x_1 = (1, 1, -1)$, $x_2 = (1, -1, 1)$, $x_3 = (-1, 1, 1)$. Montrer que la famille (x_1, x_2, x_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. Posons $E = \mathbb{R}_1[X]$, $P_1 = X$, $P_2 = X + 1$ et $P_3 = X - 1$. Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est génératrice de E .

⇔ **Exemple 7 :**

1. On reprend l'exemple précédent : posons $E = \mathbb{R}^3$, $x_1 = (1, 1, -1)$, $x_2 = (1, -1, 1)$, $x_3 = (-1, 1, 1)$. Montrer que la famille (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
 2. Posons $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$. Déterminer une base de E .
 3. Posons $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P'(0) = 0\}$. Déterminer une base de E .
-

⇔ **Exemple 8 :**

Calculer la dimension des espaces suivants :

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + z = 0\}$,
 2. $E = \{(x, 2x, 3x), x \in \mathbb{R}\}$,
 3. $E = \text{Vect}(f_1, f_2)$,
 4. $E = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, 2x = y\}$, on traitera le cas où E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et celui où E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
-

⇔ **Exemple 9 :** Posons : $\forall k \in \mathbb{N}, P_k = (X + k)^k$.

Montrer que la famille $(P_k)_{k \in [0, n]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $\mathbb{C}_n[X]$.

⇔ **Exemple 10 :**

Calculer le rang des familles suivantes :

1. $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 2)$, $x_3 = (-1, 2, -3)$,
 2. $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (1, 1, 3)$, $x_3 = (0, 1, 2)$, $x_4 = (1, 2, 4)$.
-

⇔ **Exemple 11 :** Posons $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_0[X]$. Montrer que :

$$F \oplus G = \mathbb{R}_2[X].$$
