

Exemples du chapitre 18 :

Intégration

⇔ Exemple 1 :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0.$$

⇔ Exemple 2 :

Soient $a < b$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Montrer le lemme de Lebesgue :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0.$$

⇔ Exemple 3 :

Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt.$$

⇔ Exemple 4 :

Soient $0 < a < b$, déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \cos(nt^2) dt.$$

⇔ **Exemple 5 :** Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe dans $[0, 1]$.

⇔ **Exemple 6 :** Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = 0$. On pose : $m = \min_{[0,1]} f$ et $M = \max_{[0,1]} f$. Montrer que :

$$\int_0^1 f^2 \leq -mM.$$

⇔ **Exemple 7 :** Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$, montrer que :

$$\exists c \in [a, b], f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

⇔ **Exemple 8 :** Calculer :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + e^{-k/n}},$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^2 n},$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{1/n}.$

⇔ **Exemple 9 :** Calculer, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$:

$$I(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos t + 1) dt.$$

⇨ **Exemple 10 :** On pose :

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et } f: x \mapsto \int_x^{2x} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Etudier le domaine de définition de f , sa parité et sa dérivée.

⇨ **Exemple 11 :** Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt. \end{aligned}$$

Montrer que f est deux fois dérivable et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^x \cos(x-t)g(t) dt \text{ et } f''(x) = g(x) - \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt.$$

⇨ **Exemple 12 :** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^3}{3}.$$

⇨ **Exemple 13 :** Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$
