

Exemples du chapitre 22 :

Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

⇨ **Exemple 1 :** On lance 5 dés différentiables non pipés. Quelle est la probabilité :

1. d'obtenir 5 numéros différents?
 2. d'avoir au moins un multiple de 3?
 3. d'avoir au moins deux faces identiques?
 4. que le produit des numéros obtenus soit pair?
 5. que la somme des numéros obtenus soit paire?
 6. d'obtenir au moins un multiple de 3 et un nombre pair?
-

⇨ **Exemple 2 :**

Dix paires de chaussures sont toutes rangées dans un placard. On prend au hasard 4 chaussures. Quelle est la probabilité :

1. d'obtenir deux paires de chaussures?
 2. d'obtenir au moins une paire de chaussures?
 3. d'obtenir une et une seule paire de chaussures?
-

⇨ **Exemple 3 :**

Un gardien d'un phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de n clés, dont une et une seule convient. Il essaie au hasard les clés les unes après les autres.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Calculer la probabilité que la porte s'ouvre à la k -ième tentative (et pas avant).

⇨ **Exemple 4 :**

Deux urnes A et B contiennent respectivement 6 boules blanches et 5 noires d'une part, 4 blanches et 8 noires d'autre part. On transfère au hasard deux boules de l'urne B dans l'urne A puis on tire au hasard une boule dans l'urne A .

1. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.
 2. Déterminer la probabilité que l'une au moins des deux boules transférées soit blanche sachant que la boule tirée était blanche.
-

⇨ **Exemple 5 :**

Un individu est tiré au hasard dans une population où l'on trouve une proportion de 10^{-4} de gens atteints d'une maladie. On lui fait passer le test de détection de la maladie qui donne un résultat positif. Le test n'est pas infaillible. La probabilité d'avoir un résultat positif si l'individu est malade est de 0.99 et si l'individu n'est pas malade, de 0.001.

Quelle est la probabilité pour que l'individu soit malade?

⇨ **Exemple 6 :**

On lance deux fois de suite un dé équilibré. Un espace probabilisé adapté est alors $\llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ muni de la probabilité uniforme. Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant la somme des deux dés.

⇨ **Exemple 7 :**

Reprenons l'exemple précédent. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |7 - x|$. Déterminer la loi de $Y = f(X)$.

⇔ **Exemple 8 :**

n candidats passent un examen. La probabilité de réussite pour chaque candidat est p . En cas d'échec, le candidat repasse un examen de rattrapage avec la même probabilité de réussite p . Quelle est la loi du nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux épreuves?

⇔ **Exemple 9 :**

Une urne contient 3 boules indiscernables numérotées de 1 à 3. On tire successivement deux boules avec remise, et on note X_1 et X_2 les numéros obtenus. On pose $X = X_1$ et $Y = \min(X_1, X_2)$. Déterminer la loi conjointe de X et Y .

⇔ **Exemple 10 :**

Si on reprend l'exemple précédent, on peut en déduire les lois de X et de Y .

⇔ **Exemple 11 :**

1. Une urne contient 3 boules noires et 4 boules blanches discernables. On tire deux boules successivement et avec remise.
On note X_1 la variable aléatoire qui vaut 1 si la première boule est blanche et 0 sinon.
On note Y_1 la variable aléatoire qui vaut 1 si la deuxième boule est blanche et 0 sinon.
Déterminer la loi conjointe de (X_1, Y_1) .
 2. Une urne contient 3 boules noires et 4 boules blanches discernables. On tire deux boules successivement et sans remise.
On note X_2 la variable aléatoire qui vaut 1 si la première boule est blanche et 0 sinon.
On note Y_2 la variable aléatoire qui vaut 1 si la deuxième boule est blanche et 0 sinon.
Déterminer la loi conjointe de (X_2, Y_2) .
 3. Conclure
-

⇔ **Exemple 12 :**

On lance deux fois de suite un dé à 6 faces équilibré. On définit les événements :

A : "le premier lancer donne un chiffre pair"
B : "le deuxième lancer donne un chiffre impair"
C : "l'un des lancer donne un chiffre pair, l'autre un chiffre impair"

1. Montrer que les événements A et B sont indépendants, que les événements A et C sont indépendants et que les événements B et C sont indépendants.
 2. Les événements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants?
-

⇔ **Exemple 13 :**

N personnes choisissent un fournisseur d'accès à Internet, au hasard et de manière indépendante, parmi n fournisseurs notés de 1 à n , avec $n \geq 2$.

Soit X_i le nombre de clients ayant opté pour le fournisseur i .

Déterminer la loi de X_i .

Les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont-elles indépendantes?
