

# Exemples du chapitre 23 :

## Espérance et variance

---

⇨ **Exemple 1 :** On considère un dé truqué qui donne le résultat 6 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$  et tous les autres résultats de façon équiprobable. On note  $X$  la variable aléatoire donnant le résultat obtenu. Déterminer  $E(X)$ .

---

⇨ **Exemple 2 :** Une personne écrit à une autre pendant un an (365 jours) selon la règle suivante :

- le jour de l'an, il écrit de façon certaine,
- s'il a écrit le jour  $i$ , il écrira le jour suivant avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ ,
- s'il n'a pas écrit le jour  $i$ , il écrira le jour suivant de façon certaine.

Soit  $X_i$  la variable aléatoire valant 1 si une lettre a été écrite le jour  $i$  et 0 sinon.

1. Exprimer  $P(X_{i+1} = 1)$  en fonction de  $P(X_i = 1)$ .
  2. En déduire la loi de  $X_i$  pour  $i \in \llbracket 1, 365 \rrbracket$ .
  3. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de lettres écrites dans l'année. Déterminer l'espérance de  $X$ .
- 

⇨ **Exemple 3 :** On considère un dé truqué qui donne le résultat 6 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$  et tous les autres résultats de façon équiprobable. On note  $X$  la variable aléatoire donnant le résultat obtenu. Déterminer  $E(X^2)$ .

---

⇨ **Exemple 4 :** Soient  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ .

Posons :  $X = 2U + V$  et  $Y = \frac{1}{2}U - V$ .

Montrons que  $E(XY) = E(X)E(Y)$  et que  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

---

⇨ **Exemple 5 :** Un joueur lance un dé, il gagne 2 euros s'il obtient 6, 1 euro s'il obtient 5. Par contre, il perd 1 euro si le résultat est 2. Il ne gagne rien dans tous les autres cas. Soit  $X$  le gain du joueur. Déterminer l'espérance et la variance de  $X$ .

---

⇨ **Exemple 6 :** Soit  $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ . Calculer  $V(X)$ .

---

⇨ **Exemple 7 :** Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{B}(p)$  avec  $p \in ]0, 1[$ . On pose :  $U = X + Y$  et  $V = X - Y$ . Déterminer la covariance de  $U$  et  $V$ . Les variables  $U$  et  $V$  sont-elles indépendantes?

---

⇨ **Exemple 8 :** A un péage autoroutier  $n$  voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note  $X_1$  (resp.  $X_2, X_3$ ) les variables aléatoires donnant le nombre de voitures ayant franchi la barrière 1 (resp. 2, 3).

1. Déterminer la loi de  $X_1$ .
  2. Calculer les variances de  $X_1, X_2$  et de  $X_1 + X_2$ .
  3. En déduire la covariance de  $X_1$  et  $X_2$ .
- 

⇨ **Exemple 9 :** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ . Montrer que, pour tout  $c \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\frac{E(X) - c}{n - c} \leq P(X \geq c) \leq \frac{E(X) - 1}{c - 1}.$$

---

⇨ **Exemple 10 :** On souhaite estimer l'équilibre d'une pièce. On note  $p$  la probabilité (inconnue) que la pièce tombe sur pile. On lance  $n$  fois la pièce et on note  $S_n$  le nombre de lancers ayant donné pile.  
A partir de combien de lancers peut-on supposer que  $\frac{S_n}{n}$  est une approximation de  $p$  à 0.01 près avec une probabilité supérieure à 95%?

---

⇨ **Exemple 11 :** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes avec  $X_n$  suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p_n$ . Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left( \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

---