Exemples du chapitre 24 : Déterminants

➪ **Exemple 1 :** Calculer $d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, et $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

➪ **Exemple 2 :** Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $x_1 = (t, 3, -1)$, $x_2 = (1, -1, t)$ et $x_3 = (1, t, -1)$.
Pour quelles valeurs de t, (x_1, x_2, x_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$?

➪ **Exemple 3 :** Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (X^2+1)P'' - 3XP' + aP. \end{array}$.
Pour quelles valeurs de a, u est-elle bijective ?

➪ **Exemple 4 :** Soit $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X). \end{array}$.
Calculer $\det(u)$.

➪ **Exemple 5 :** Soit n impair et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A + I_n = 0$. Déterminer A^3 et en déduire $\det(A)$.

➪ **Exemple 6 :** Soit $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Calculer D en effectuant un développement par rapport à la deuxième ligne.

➪ **Exemple 7 :** Soit $\theta \in [0, \pi]$, soit, pour tout $n \in N^*$, d_n le déterminant de taille n :

$$d_n = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}$$

1. Exprimer d_{n+2} en fonction de d_{n+1} et d_n.
2. En déduire d_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

➪ **Exemple 8 :** Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Ce déterminant est appelé déterminant de Vandermonde.
