Exemples du chapitre 25 :
Espaces préhilbertiens réels

➪ **Exemple 1 :**

1. On pose :
$$\forall f,g\in\mathcal{C}^0([-1,1]),\ <f,g>=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)\,dt.$$
Montrer que $<,>$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([-1,1])$.
2. On pose :
$$\forall P,Q\in\mathbb{R}_n[X],\ <P,Q>=\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0).$$
Montrer que $<,>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

➪ **Exemple 2 :** Soient $f,g\in\mathcal{L}(E)$ tels que :
$$\forall x\in E,\ \|f(x)\|=\|g(x)\|.$$
Montrer que :
$$\forall x,y\in E,\ (f(x)|f(y))=(g(x)|g(y)).$$

➪ **Exemple 3 :** Soient $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n,c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}^+$. Montrer que :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_kc_k\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2c_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2c_k\right).$$

➪ **Exemple 4 :** Soient $0<a<b$, montrer que :
$$\ln b-\ln a\le\frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

➪ **Exemple 5 :** Soit $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+2y+3z=1\}$. Déterminer :
$$\min_{(x,y,z)\in A}(x^2+y^2+z^2).$$

➪ **Exemple 6 :** Soit $E=\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et soit $F=\{(x,y,z)\in E,\ x+y-z=0\}$.
Déterminer $F^{\perp}$.

➪ **Exemple 7 :** Soit $n\in\mathbb{N}^*$, soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini par :
$$\forall P,Q\in E,\ <P,Q>=\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$
Soit $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}\setminus\{0\}$.
Calculer le degré de P.

➪ **Exemple 8 :** Soit $E=\mathcal{C}^0([-1,1])$ muni du produit scalaire défini par :
$$\forall f,g\in E,\ <f,g>=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt.$$
Soient F l'ensemble des fonctions paires de E et G l'ensemble des fonctions impaires de E. Montrer que :
$$F=G^{\perp}.$$

➪ **Exemple 9 :** Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien. On pose, pour tout $a \in E$:

$$f_a : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & <x, a> \end{array} \quad \text{et} \quad \Phi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ a & \mapsto & f_a. \end{array}$$

1. Montrer que Φ est un isomorphisme.
2. En déduire que pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \varphi(x) = <x, a> .$$

➪ **Exemple 10 :** Orthonormaliser la famille $((1,1,1),(1,0,-1),(-1,2,3))$ pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.

➪ **Exemple 11 :** Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in E, <P, Q> = \int_0^1 tP(t)Q(t)\, dt.$$

Orthonormaliser la base canonique de E.

➪ **Exemple 12 :** Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E, <x, f(x)> = 0$. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.

➪ **Exemple 13 :** Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et soit $F = \{(x, y, z) \in E, x + y - z = 0\}$.
Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur F.

➪ **Exemple 14 :** Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soient $x = (1,2,3)$ et $F = \{(x, y, z) \in E, x + 2y - z = 0\}$. Calculer $d(x, F)$.

➪ **Exemple 15 :** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts. On pose :

$$\forall P, Q \in E, (P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k).$$

1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de E.
3. Soit $F = \{P \in E, \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$.
4. Soit $Q \in E$, calculer $d(Q, F)$.
