

Exemples du chapitre 26 :

Séries numériques

⇨ **Exemple 1 :** Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$, appelée série harmonique n'est pas grossièrement divergente mais diverge.

⇨ **Exemple 2 :**

Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme :

$$\sum_{n \geq 0} \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2 + n + 1}.$$

⇨ **Exemple 3 :**

Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{n!}.$$

⇨ **Exemple 4 :** Déterminer un équivalent de :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

⇨ **Exemple 5 :** Etudier la nature des séries $\sum u_n$ avec :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2 + \sin(n)}{\sqrt{n}}$,
 - $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n \left(1 - \cos \frac{1}{n^{3/2}} \right)$,
 - $\forall n \geq 2, u_n = \sin \frac{1}{n} + \ln \frac{n-1}{n}$.
-

⇨ **Exemple 6 :**

1. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

2. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

Le réel γ est appelé la constante d'Euler.

⇨ **Exemple 7 :** Etudier la nature des séries $\sum u_n$ avec :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$,
 - $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln^2(n) \left(1 - \cos \frac{1}{n^{3/2}} \right)$.
-

⇨ **Exemple 8 :**

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, montrer que la série :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

converge ssi :

$$\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est appelée série de Bertrand.

⇔ **Exemple 9 :** Etudier la convergence absolue de la série : $\sum \frac{(-1)^n \sin \frac{1}{n}}{n}$.

⇔ **Exemple 10 :** Montrons que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.

⇔ **Exemple 11 :** En admettant que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, montrer que les séries suivantes convergent :

$$\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \text{ et } \sum \frac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}}.$$

⇔ **Exemple 12 :**

Etudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sqrt{n^4 + n + 1} - \sqrt{n^4 + an}, \quad a \in \mathbb{R}.$$
