Exemples du chapitre 27 : Fonctions de deux variables

➪ **Exemple 1 :** Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en $(0,0)$ pour les fonctions f suivantes :

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$,
2. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

➪ **Exemple 2 :** Etudier la continuité en $(0,0)$ des fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

1. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

---

➪ **Exemple 3 :** Si elles existent, calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^2+(y-x)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

➪ **Exemple 4 :** Les fonctions suivantes sont-elles $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$?

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^2+(y-x)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

➪ **Exemple 5 :** Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $(x,y) \mapsto f(y,x)$,
2. $(x,y) \mapsto f(x,x)$,
3. $(x,y) \mapsto xyf(xy,x^2)$,
4. $(x,y) \mapsto f(f(x,y), f(y,x))$.

➪ **Exemple 6 :** Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles de : $(r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

➪ **Exemple 7 :** Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 y.$$

On pourra poser $(u,v) = (x, x+2y)$.

➪ **Exemple 8 :** Etudier les extremums de :

1. $f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x-y)^2 + x^3 + y^3 \end{array}$,
2. $f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x-y)^2 + x^4 + y^4 \end{array}$.
3. $f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x\left((\ln x)^2 + y^2\right) \end{array}$.
