Exercices du chapitre 11 : Suites numériques

I Limite d'une suite réelle

Exercice 1 : (⋆ ⋆ ⋆)
Soit (u_n) une suite de réels et soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application.

1. On suppose f injective. Montrer que si (u_n) converge, alors $(u_{f(n)})$ converge.
2. On suppose f surjective. Montrer que si $(u_{f(n)})$ converge, alors (u_n) converge.
3. On suppose f bijective. Montrer que (u_n) converge si et seulement si $(u_{f(n)})$ converge.

Exercice 2 :
Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$. Etudier la limite de la suite définie par :

$$u_n = \sqrt{(n+a)(n+b)} - n.$$

Exercice 3 :
Déterminer les limites éventuelles des suites :

1. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$,
2. $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}$,
3. $u_n = \dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2-1}}$,

Exercice 4 : (⋆)
Etudier les limites des suites définies par :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n}$,
2. $u_n = \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$, $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$,
3. $u_n = \dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos n+\frac{1}{n^2}}$,
4. $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$,
5. $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}$.

Exercice 5 : (⋆) Etudier la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(2+\frac{4}{3}\cos n\right)^{1/n}.$$

Exercice 6 :
Déterminer les limites éventuelles des suites :

1. $u_n = n^{1/\ln n}$,
2. $u_n = (\ln n)^{1/n}$,
3. $u_n = n^{\frac{\sin n}{n}}$,
4. $u_n = \left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^{1/\ln n}$.

Exercice 7 : (⋆) Soit (u_n) une suite à termes positifs telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

1. Montrer que si $l<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Montrer que si $l>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 8 : (⋆)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes. On définit les suites (x_n) et (y_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \sup(u_n, v_n),\ y_n = \inf(u_n, v_n).$$

1. Montrer que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \sup(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|) \text{ et } \inf(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$
2. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et exprimer leurs limites en fonctions de celles de (u_n) et (v_n).

Exercice 9 :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq a,\ v_n \leq b$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = a+b.$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = b.$$

Exercice 10 : (⋆)
Etudier la limite de la suite :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n^n}{n!}.$$

Exercice 11 :
Déterminer les limites éventuelles des suites :

1. $u_n = \dfrac{\left\lfloor (n+\frac{1}{2})^8 \right\rfloor}{\left\lfloor (n-\frac{1}{2})^8 \right\rfloor}$,
2. $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$,

Exercice 12 : (⋆)
A l'aide d'un encadrement, montrer que la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$
est convergente et donner sa limite.

Exercice 13 : (⋆)
On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k!$$
Etudier la convergence de (u_n).

Exercice 14 : (⋆⋆)
Soit (u_n) une suite de réels décroissante tendant vers 0 telle que :
$$\lim n(u_n + u_{n+1}) = 1.$$
Montrer que :
$$\lim n u_n = \frac{1}{2}.$$

II Suites monotones

Exercice 15 :
Déterminer, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble :
$$A = \{2 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Exercice 16 : (⋆⋆)
Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$.
2. Montrer que $A \cup B$ est majorée et déterminer $\sup(A \cup B)$.
3. Montrer que $A \cap B$ est majorée. Peut-on déterminer $\sup(A \cap B)$?

Exercice 17 : (⋆⋆)
Déterminer, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants :

1. $A = \left\{(-1)^n(1 - \frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$,
2. $B = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p},\ (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$.

Exercice 18 : (⋆⋆)
Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $\{|x-y|,\ x, y \in A\}$ possède une borne supérieure. On appelle ce nombre diamètre de A et on le note $d(A)$. Montrer que :
$$d(A) \leq \sup A - \inf A \text{ et } \forall \varepsilon > 0,\ \exists (x,y) \in A^2,\ |x-y| > \sup A - \inf A - 2\varepsilon.$$
Conclure.

Exercice 19 : (⋆)
Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que :
$$a = \sup(A) \Longleftrightarrow \forall x \in A,\ x \leq a \text{ et il existe une suite } (u_n) \text{ de } A \text{ telle que } a = \lim u_n.$$

Exercice 20 : (⋆)
Soit (a_n) une suite de réels positifs. Soit (u_n) une suite définie par :
$$0 < u_0 < \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{Arctan}\,(a_n + \tan(u_n)).$$
Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 21 : (⋆⋆)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0, +\infty[$ tel que :
$$\ln(x_n) + x_n = n.$$
2. Montrer que la suite (x_n) est croissante.
3. Montrer que :
$$\lim x_n = +\infty.$$

Exercice 22 : (⋆)
On considère la suite définie par :
$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 2$.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
4. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 23 : (⋆⋆)
Soit (u_n) une suite de réels telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} < u_n < 1.$$

On pose $v_0 = u_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{v_{n-1}+u_n}{1+u_n v_{n-1}}$.
Montrer que la suite (v_n) converge et trouver sa limite.
On commencera par prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < 1$ et que (v_n) est monotone.

Exercice 24 : (⋆) Etudier la suite définie par :

$$u_0 \in]0,1[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{4}{\pi}\mathrm{Arctan}(u_n).$$

Exercice 25 : (⋆) Etudier la suite définie par :

$$u_0 = \frac{3}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{3} + \frac{2}{3}.$$

Exercice 26 : (⋆) Etudier la suite réelle définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{16} + u_n^2.$$

Exercice 27 : (⋆⋆) Etudier les suites réelles définies par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{16} + u_n^2.$$

Exercice 28 : (⋆⋆)
Etudier les suites réelles (u_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+2u_n).$$

Exercice 29 : (⋆)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < v_n.$$
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0).$$
3. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 30 : (⋆)
Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$u_0 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+2},$$

$$v_0 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{v_n+1}{v_n+2}.$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 31 : (⋆⋆)
On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},\ v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   Soit l leur limite commune.
2. Montrer que l est irrationnel.

Exercice 32 : (⋆⋆)
Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1}$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}$, $n \geq 3$,
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha k!}$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^{\alpha+1} n!}$, $n \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

III Suites extraites

Exercice 33 :
Montrer que la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{5n^2 + \sin n}{3(n+2)^2 \cos\frac{n\pi}{5}}$$

n'a pas de limite.

Exercice 34 : (⋆)
Montrer que la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n = \sin\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\frac{\pi}{2}\right)$$

n'a pas de limite.

Exercice 35 : (⋆)
Soit (x_n) une suite réelle. On suppose que les suites (x_{2n}), (x_{2n+1}) et (x_{3n}) convergent. Montrer que la suite (x_n) converge.

Exercice 36 : (⋆⋆)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que :
$$\forall m \in \mathbb{N}, \; H_{2^{m+1}} - H_{2^m} \geq \frac{1}{2}.$$
2. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 37 : (⋆)

On dit qu'une suite (u_n) est périodique ssi :

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \; \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+p} = u_n.$$

Montrer que toute suite réelle périodique et convergente est constante.

Exercice 38 : (⋆⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que la suite (S_n) converge.

Exercice 39 : (⋆ ⋆ ⋆)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Z}$. Montrer que l'existence d'une des deux limites $\lim_{n \to +\infty} \cos(n\alpha)$ et $\lim_{n \to +\infty} \sin(n\alpha)$ entraîne celle de l'autre et que l'existence de ces deux limites conduirait à une contradiction. Conclure.

IV Suites complexes

Exercice 40 : (⋆) Etudier la convergence de la suite complexe (z_n) définie par :

1. $z_n = x_n + i y_n$ avec, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - y_n)$ et $y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$,
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{i}{2} z_n + 1$.