Exercices du chapitre 12 : Calcul matriciel et systèmes linéaires

Dans toute la feuille $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Ensemble de matrices

Exercice 1 :
On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ M(x+y) = M(x)M(y).$$

Exercice 2 :
Soient $P, S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P^2 = P$, $S^2 = I_n$ et $(S-P)(S+P) = 0$. Montrer que $P = I_n$.

Exercice 3 :
Résoudre l'équation $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4 :
Soit $t \in \mathbb{R}$, soit $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A^2 = aA + bI_3.$$

Exercice 5 : ($\star\star$)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soient $r, s, i, j \in [\![1, n]\!]$. Calculer le terme (i, j) de $AE_{r,s}B$.
2. On suppose que :
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AXB = 0_n.$$
Montrer que A ou B est nulle.

Exercice 6 : ($\star\star$)
Déterminer :

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\}.$$

Exercice 7 : ($\star\star$)
Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de M et on note $\mathrm{tr}(M)$ le nombre :

$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}.$$

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, montrer que :
$$\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B).$$
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que :
$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :
$$\mathrm{tr}(A^T A) = 0 \Longleftrightarrow A = 0_n.$$
4. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :
$$(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(BM)) \Longleftrightarrow A = B.$$
5. Existe-t-il des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?

II Ensemble des matrices carrées

Exercice 8 :
On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & -4n \\ n & 1-2n \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 : $(\star\star)$
On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 : $(\star\star)$
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$. Posons :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix}.$$

1. Ecrire M^2 en fonction de M et de I_2.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer M^n en fonction de M et de I_2.

Exercice 11 :
On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^3. En déduire $(I_3 + A)^n$ pour $n \geq 3$.

Exercice 12 :
Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ avec :

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$,
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 :
Calculer A^p, $p \in \mathbb{N}$, où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 :
Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$, où :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 : $(\star)$
Soient (u_n) et (v_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = 5u_n - 4v_n \\ v_{n+1} = 4u_n - 3v_n \end{array} \right. .$$

Exprimer le terme général de ces suites en fonction de u_0 et v_0.

Exercice 16 : $(\star\star)$ Soient (x_n), (y_n) et (z_n) définies par x_0, y_0, $z_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{2}{3}z_n \end{array} \right. .$$

Etudier la convergence de ces trois suites.

Exercice 17 : $(\star\star)$
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{C}$ et soit :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $M_{a,b}^k$.

Exercice 18 : Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit symétrique.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices antisymétriques soit antisymétrique.

Exercice 19 : $(\star\star)$
Montrer que toute matrice carrée se décompose de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

III Opérations élémentaires

Exercice 20 : $(\star\star)$ On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -2 & -2 \\ 2 & -6 & -6 & -4 & -2 \\ -3 & 12 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'on peut, en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de A, obtenir la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

IV Systèmes linéaires

Exercice 21 :
Résoudre les systèmess suivant d'inconnues $x, y, z, t \in \mathbb{R}$:

1. $\begin{cases} x+y-z+t=2 \\ 2x-2y+z-3t=1 \\ -x+y+z-2t=-2 \end{cases}$,

2. $\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+6t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=0 \end{cases}$.

Exercice 22 :
Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues x, y, z ou x, y, z, t :

1. $\begin{cases} 2x+y-3z=a \\ 3x+2y+z=a+3 \\ 7x+4y-5z=2a+5 \end{cases}$,

2. $\begin{cases} x+2y-z+t=1 \\ x+3y+z-t=1 \\ -x+y+7z+2t=1 \\ 2x+y-8z+t=a \end{cases}$.

Exercice 23 : $(\star)$
Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues x, y, z, t :

1. $\begin{cases} 2x-y+z+t=1 \\ x+2y-z+4t=2 \\ x+7y-4z+11t=m \end{cases}$,

2. $\begin{cases} mx+y+z+t=1 \\ x+my+z+t=m \\ x+y+mz+t=m+1 \end{cases}$.

V Matrices inversibles

Exercice 24 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, telle que $A^n + A^{n-1} = I_n$.
Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 25 :
On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer $(A+I_3)^3$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 26 :
On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^3 - 4A^2 + 5A$.
2. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3.

Exercice 27 : $(\star\star)$
Soit $t \in \mathbb{K}$, on considère les matrices $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définies par :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ a_{i,j} = \begin{cases} t^{j-i}\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j, \end{cases}$$

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ b_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j}t^{j-i}\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j, \end{cases}$$

Montrer que A et B sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 28 : $(\star\star)$
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{K})$ tel que $A^T = P^{-1}AP$.

Exercice 29 : $(\star\star)$
Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A + A^{-1} = I_n$.
On utilise la notation suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^{-k} = (A^{-1})^k.$$

Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists u_k \in \mathbb{R},\ A^k + A^{-k} = u_k I_n,$$

et calculer u_k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 30 : $(\star\star)$

1. Déterminer :
$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall A \in GL_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\}.$$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que :
$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A = MN \Longrightarrow A = NM.$$
Montrer que A est une matrice scalaire.

Exercice 31 : Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 32 : ($\star$)
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer la matrice :

$$D = P^{-1}AP$$

   ainsi que ses puissances n, $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire A^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 33 : ($\star$)
On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ ainsi que D^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 34 : ($\star\star$)
On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer la matrice $T = P^{-1}AP$
3. Calculer la T^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.