

I Nombre dérivé, fonction dérivée

Exercice 1: 

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , soient $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivable en a . Calculer :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}.$$

Exercice 2: (★)

Soit $f \in \mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R})$ dérivable en 0, soient (a_n) et (b_n) des suites convergeant vers 0 et telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, -1 < a_n < 0 < b_n < 1$. Montrer que la suite $\left(\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \right)$ converge vers $f'(0)$.

Exercice 3: (★)

Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par : $f(x) = \frac{x}{\ln|x|} \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[-1, 1]$.
2. On considère les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, v_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}.$$

Calculer les limites des suites $(f'(u_n))$ et $(f'(v_n))$.

3. En déduire que la fonction f' n'est pas bornée au voisinage de 0.

Exercice 4: (★)

Etudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

1. $f_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x \operatorname{Arcsin}(x)}$,
2. $f_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^3 \operatorname{Arcsin}(x)}$,
3. $f_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Exercice 5: (★)

Etudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

1. $f_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^{n+1} + x^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$,
2. $f_2 : x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$,
3. $f_3 : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Exercice 6: 

On considère la fonction définie par :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right[, f(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection vers un intervalle que l'on précisera.
2. Sans déterminer f^{-1} , montrer que f^{-1} est dérivable sur un intervalle que l'on précisera et calculer $(f^{-1})'$.

II Propriétés des fonctions dérivables

Exercice 7: 

Soit $T \in \mathbb{R}^*$. Soit f une fonction dérivable et T -périodique. Montrer que f' s'annule une infinité de fois.

Exercice 8: 

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Montrer que l'équation $5ax^4 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$ a une solution dans $]0, 1[$.

Exercice 9: 

Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$ et deux fois dérivable sur $]-1, 1[$ telle que $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que :

$$\exists c \in]-1, 1[, f''(c) = 0.$$

Exercice 10: 

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = e$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que :

$$f'(c) = f(c).$$

Exercice 11: (★)

Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$, soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que :

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = -\lambda \frac{f(c)}{c}.$$

Exercice 12 : (★) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, soient $f, g \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Exercice 13 : (★★)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a).$$

On pose :

$$g : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f\left(\frac{1}{x} + a - 1\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(a) & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.
2. En déduire qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que :

$$f'(c) = 0.$$

Exercice 14 : (★★)

Soit f une application définie et continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$. Montrer que :

$$\exists x_0 \in]a, +\infty[, f'(x_0) = 0.$$

Exercice 15 : (★) Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soient $n, k, l \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq l \leq k$ et $0 \leq l \leq n$, soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ n fois dérivable sur I . On suppose que f admet au moins k zéros dans I . Montrer que $f^{(l)}$ admet au moins $k - l$ zéros dans I .

Exercice 16 : (★★)

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer que :

$$\exists c \in]a, b[, f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

2. En déduire la règle de L'Hôpital : si f et g sont deux fonctions continues sur $V =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et dérivables sur $V \setminus \{x_0\}$, telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$, et : $\forall x \in V \setminus \{x_0\}, g'(x) \neq 0$. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

3. Application : calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

Exercice 17 :  Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \ln \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{k}.$$

Exercice 18 : (★) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c > 0$ tel que :

$$f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c)).$$

Exercice 19 : (★) Déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) \right)$$

Exercice 20 : (★) 

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \left(\frac{1+x}{x}\right)^x \leq e \leq \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}.$$

En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

Exercice 21 : 

1. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2} \sin u_n.$$

Etudier la convergence de (u_n) .

2. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos u_n.$$

Etudier la convergence de (u_n) .

Exercice 22 : (★)

Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$,
2. $\forall x \in]-1, +\infty[, \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$,
3. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], x \cos x < \frac{\pi^2}{16}$,
4. $\forall (x, y) \in [0, 1]^2, x < y, \frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}} < \operatorname{Arcsin} y - \operatorname{Arcsin} x < \frac{y-x}{\sqrt{1-y^2}}$.

 Exercice 23 : Soit :

$$\begin{aligned} f: & [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto e^{-1/x^2} \end{aligned}$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement par continuité en 0 est dérivable en 0.

Exercice 24 : (*)

Etudier la dérivabilité en 1 de $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x \arcsin x}$.

Exercice 25 : (★★)

Résoudre l'équation différentielle sur \mathbb{R} :

$$x(x-1)y' + (2x-1)y = 1.$$

Exercice 26 : (★★) Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisant la méthode de variation de la constante :

$$xy' - 2y - x^4 = 0.$$

Exercice 27 : (★★)

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y = |x| + 1.$$

III Fonctions de classe \mathcal{C}^k

 Exercice 28 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n ième de :

$$\begin{aligned} f: & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto \cos(2x)e^{2x} \end{aligned}$$

 Exercice 29 :

Soit $n > 2$, calculer la dérivée n ième de :

$$\begin{aligned} \varphi: & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto (x^2 + 1)e^{2x} \end{aligned}$$

Exercice 30 : (*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la dérivée n ième de :

$$\begin{aligned} f: & \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{1-x}{1+x} \end{aligned}$$

 Exercice 31 : Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n ième de :

1. $f_1: x \mapsto \cos^3 x$,
2. $f_2: x \mapsto e^x \sin x$,
3. $f_3: x \mapsto (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$.

Exercice 32 : (★★)

Calculer la dérivée n ième de $f: x \mapsto x^n(1+x)^n$.

$$\text{En déduire } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

Exercice 33 : (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée $(n+1)$ -ième de :

$$f_n: x \mapsto x^n e^{1/x}.$$

Exercice 34 : (★★)

Soit $f \in C^\infty([0, 1])$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], |f^{(n)}(x)| \leq x.$$

Montrer que f est la fonction constante nulle.

IV Fonctions convexes

 Exercice 35 :

Montrer que :

$$\forall x, y \in]1, +\infty[, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercice 36 : (*)

1. Montrer que : $f: \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \ln(x)$ est convexe.
2. En déduire que :

$$\forall x \in]0, 1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

Exercice 37 : (*)

1. Soit f une fonction convexe et majorée sur \mathbb{R} . Montrer que f est constante.
2. Donner un exemple de fonction convexe et majorée sur $]0, +\infty[$ et qui ne soit pas constante.

Exercice 38 : (★★)

Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Posons :

$$\begin{aligned} g: & [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) + f(1-x). \end{aligned}$$

Montrer que g est décroissante.

Exercice 39 : (★★)

Déterminer toutes les fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f soit convexe et concave (c'est-à-dire telle que $-f$ soit convexe).

Exercice 40 : (★★★)

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in I$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$.

Montrer l'inégalité de Jensen :

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

2. Applications :

(a) Montrer que, pour tout $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$:

$$a_1 a_2^2 a_3^3 \leq \left(\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3}{6}\right)^6.$$

(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in]0, 1]$ tels que : $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^n \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \geq \frac{(n^2 + 1)^2}{n}.$$