# Exercices du chapitre 15 : Polynômes



## I L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

**Exercice 1 :** $(\star)$
Déterminer tous les $P \in \mathbb{C}_4[X]$ unitaires tels que :

$$P(X) = P(2-X).$$

**Exercice 2 :** $(\star)$
Déterminer tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P(2X) = 2P(X).$$

**Exercice 3 :** $(\star)$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k X^k$. Calculer :
$$\deg(P+Q).$$
2. Soit $n \geq 2$, on pose : $P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 X^k$ et $Q = X^n + (-1)^n n^2 X^{n-1} + X^{n-2}$. Calculer :
$$\deg(P-Q).$$

**Exercice 4 :** $(\star)$ Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X).$$

## II Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

**Exercice 5 :**
Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$X^2 | (X+1)^n - nX - 1.$$

**Exercice 6 :** $(\star\star)$ Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P - X$ divise $P \circ P - X$.
En déduire les solutions $x \in \mathbb{R}$ de :

$$(x^2 - 3x + 1)^2 = 3x^2 - 8x + 2.$$

**Exercice 7 :** Effectuer la division euclidienne de $A$ par $B$ avec :

1. $A = X^4 + 2X^3 - X + 6$, $B = X^3 - 6X^2 + X + 4$,
2. $A = iX^3 - X^2 + 1 - i$, $B = (1+i)X^2 - iX + 3$,

**Exercice 8 :** Effectuer la division euclidienne de $A$ par $B$ avec :

1. $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$, $B = X^2 - 3X + 1$,
2. $A = X^3 - iX^2 - X$, $B = X - 1 + i$,

**Exercice 9 :** $(\star)$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $A = X^{2n} - X^2 + 1$ et $B = X^2 - X$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $A$ par $B$.

**Exercice 10 :** $(\star)$
Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & 6 & -24 \\ 3 & 8 & -12 \\ 3 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 7A + 10I_3 = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $X^2 - 7X + 10$.
3. En déduire $A^n$.

**Exercice 11 :** $(\star\star)$
Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $q$ et $r$ le quotient et le reste de la division euclidienne de $n$ par $p$ et soit $a \in \mathbb{K}^*$.

1. Montrer que le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $X^p - a$ est $a^q X^r$.
2. Calculer le reste de la division euclidienne de $X^n - a^n$ par $X^p - a^p$.
3. Calculer le reste de la division euclidienne de $X^{12} + 8X^{11} + 5X^6 - 3X^4 + X^2 - 5$ par $X^3 - 1$.

## III Evaluation polynomiale et racines

**Exercice 12 : ($\star$)**
Soit $P = 3X^4 + 8X^3 - 16X - 12$.

1. Montrer que :
$$P = 4(X+1)^4 - (X+2)^4.$$
2. En déduire les racines complexes de $P$.

**Exercice 13 :**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :
$$X^2 - 3X + 2 | (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1.$$

**Exercice 14 : ($\star$)**
Déterminer les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$$X^2 + 1 | X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 1.$$

**Exercice 15 : ($\star\star$)**
Résoudre l'équation d'inconnues $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ :
$$(X^2 - 5X + 7)P + (X-2)Q = (2X-3).$$

**Exercice 16 : ($\star\star$)**
On définit une suite de polynômes par :
$$T_0 = 1,\ T_1 = X,$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $T_n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $T_n$ est l'unique polynôme vérifiant :
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$
3. Déterminer les racines de $T_n$.

**Exercice 17 :**
Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ dont la fonction polynomiale associée est périodique.

**Exercice 18 :**
Soit $(S)$ le système :
$$\begin{cases} 3x + 4xy + 3y &= -5 \\ x - 2xy + y &= 5 \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de la somme $s = x + y$ et du produit $p = xy$ de tout couple $(x,y)$ de solutions de $(S)$.
2. Résoudre $(S)$.

## IV Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

**Exercice 19 :**
Soit $n \geq 1$. Soit $P$ un polynôme de degré $n$.
Déterminer le degré des polynômes $Q = X^2P' + P$ et $R = XP' + P$.

**Exercice 20 : ($\star$)**
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :
$$XP'' + X^2P' = 2X^3 - X^2 + 2X.$$

**Exercice 21 : ($\star\star$)**
Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :
$$X^2P'' + 2XP' - 2P = 0.$$

**Exercice 22 : ($\star$)**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} P_n^{(n)} \text{ où } P_n = (X^2-1)^n.$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $L_n$.
2. Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.

**Exercice 23 : ($\star\star$)**
Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$, soit $n = \deg P$. Montrer que les sommes des zéros de $P$, $P'$, ..., $P^{(n-1)}$ forment une progression arithmétique.

**Exercice 24 :**
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que :
$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P^{(k)}(0) = k! a_k.$$

**Exercice 25 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :
$$(X-1)^2 \left| \left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k\right)^2 - n^2 X^{n-1} \right.$$
et
$$(X-1)^3 \left| nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n. \right.$$

**Exercice 26 :** ($\star$)
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

1. Calculer $P(X) - P'(X)$.
2. Montrer que toutes les racines complexes de $P$ sont simples.

**Exercice 27 :** ($\star\star$)
Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tel que $b \neq 0$.
Trouver les polynômes de degré 5 tels que $P(X)+a$ soit divisible par $(X+b)^3$ et $P(X)-a$ soit divisible par $(X-b)^3$.

**Exercice 28 :** Soit $P = X^{10} - 25X^6 + 48X^5 - 25X^4 + 1 \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que 1 est racine de $P$ et déterminer son ordre de multiplicité.

**Exercice 29 :**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $(X-3)^2$.

**Exercice 30 :** ($\star\star\star$)
Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tels que $P = (X-1)^n - (X^n - 1)$ ait une racine double.

**Exercice 31 :** ($\star$) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
Montrer que si $P$ est scindé et $\deg(P) \geq 2$ alors $P'$ est scindé.

# V Polynômes irréductibles

**Exercice 32 :** ($\star$)

1. Déterminer tous les $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que :
$$Q(X+1) = Q(X).$$
2. Déterminer tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :
$$(X+4)P(X) = XP(X+1).$$

**Exercice 33 :** ($\star\star$)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg P \geq 2$. Montrer que l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto P(x)$ n'est pas injective.

**Exercice 34 :** ($\star\star$)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :
$$P(X^2) = P(X-1)P(X+1).$$

1. Montrer que si $\alpha$ est racine de $P$, il existe une racine de $P$ dont le module est strictement supérieur à $|\alpha|$.
2. En déduire le polynôme $P$.

**Exercice 35 :** ($\star\star$)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$. Déterminer la décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de $P_n$.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de :
$$\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n+1}.$$

**Exercice 36 :**
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P = X^4 + 2X^2 - 3$,
2. $Q = (X^2+1)^2 + (X^2 - X - 1)^2$.

**Exercice 37 :** Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $(X^2 - X + 1)^2 + 1$,
2. $X^3 - 5X^2 + 3X + 9$,
3. $(X^2 - X + 2)^2 + (X-2)^2$,
4. $6X^5 + 15X^4 + 20X^3 + 15X^2 + 6X + 1$.

**Exercice 38 :** ($\star$)
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 - 14X^2 + 24X - 8$ sachant qu'il admet une racine multiple.

**Exercice 39 :** ($\star$) Donner la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ de :

$$P = X^n - 1$$

**Exercice 40 :** ($\star$)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme :

$$X^{2n} - 2(\cos a)X^n + 1.$$

## VI Introduction à la décomposition en éléments simples

**Exercice 41 :** Déterminer une primitive de :

$$f : x \mapsto \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

**Exercice 42 : ($\star$)** Déterminer une primitive de :

$$f : x \mapsto \frac{13}{(x-1)(x^2+4x+8)}.$$

**Exercice 43 : ($\star$)** Déterminer une primitive de :

$$f : x \mapsto \frac{x^5}{x^4-1}.$$

**Exercice 44 : ($\star$)**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la décomposition en éléments simples de :

$$\frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)}$$

**Exercice 45 : ($\star$)**

1. Décomposer en éléments simples :

$$\frac{3X+8}{X(X+2)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k+8}{k(k+2)2^k}.$$

3. En déduire la limite de la suite $(S_n)$.

**Exercice 46 : ($\star\star$)**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^*$ deux à deux distincts, soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Posons :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - x_k).$$

1. Montrer que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ P'(x_k) = \lambda \prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} (x_k - x_j).$$

2. En déduire que la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$ est :

$$\frac{1}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)(X-x_k)}.$$

3. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}.$$