

I Relations de comparaison : cas des fonctions

Exercice 1 :

Déterminer un équivalent simple de f au voisinage de 0 ($a > 0, b > 0$) :

1. $f(x) = \cos(\sin x)$,
2. $f(x) = \ln(\cos x)$,
3. $f(x) = \ln(\sin x)$,
4. $f(x) = \cos(ax) - \cos(bx)$.

Exercice 2 : (★)

Déterminer un équivalent simple de f au voisinage de 0 ($a > 0, b > 0, a \neq b$) :

1. $f(x) = a^x - b^x$,
2. $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)$,
3. $f(x) = \sqrt[4]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-x^2}$,
4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+3x}} - \frac{1}{\sqrt{2-3x}}$.

Exercice 3 :

Calculer les limites suivantes en se servant d'équivalents :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan(5x^2)} - 1}{\sin^2(3x)}$,
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5 \cos x) - \ln(5)}{x^2}$.

Exercice 4 : (★)

Calculer les limites suivantes en se servant d'équivalents :

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \tan 2x$,
2. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1) \tan \pi x$,
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$,
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos 2x}$.

Exercice 5 : (★)

Calculer les limites suivantes en se servant d'équivalents :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(1 + \ln(1 + x))$,
2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{1/\sin x}$,
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln x}{x^x - 1}$.

Exercice 6 : (★)

Calculer les limites suivantes en se servant d'équivalents :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (e^{\cos x - 1} - 1)$,
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x+1} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \right)$.

Exercice 7 : (★★)

Comparer les fonctions suivantes au voisinage des points indiqués :

1. $x \ln x$ et $\ln(1 + 2x)$ au voisinage de 0,
2. $x \ln x$ et $\sqrt{x^2 + 3x} \ln(x^2)$ au voisinage de $+\infty$,
3. $\frac{1}{x+1}$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ au voisinage de -1 ,
4. $x^{-1/x}$ et $\ln x$ au voisinage de 0.

II Développements limités

Exercice 8 :

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \sin x + e^x$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \sin x$ à l'ordre 3 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$,
3. $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 1.

Exercice 9 :

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \cos x$ à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$,
2. $f : x \mapsto \ln x$ à l'ordre 4 au voisinage de e ,
3. $f : x \mapsto e^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 1,

4. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 2.

Exercice 10 :

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto (e^x - 1)^2$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Exercice 11 : (★)

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto e^x \operatorname{Arctan} x$ à l'ordre 5 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 1,
3. $f : x \mapsto \frac{(\sin x)^2}{x^2}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
4. $f : x \mapsto (\cos x)^3$ à l'ordre 6 au voisinage de 0.

Exercice 12 :

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{\operatorname{ch}(x)}{2 + \ln(1+x)}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \ln(5 \cos x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Exercice 13 :

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto e^{\sin x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto e^{\cos x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Exercice 14 :

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \ln \frac{\sin x}{x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \sin(2x - 4x^2) - 2 \sin(x - x^2)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 15 : (★★)

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto (1+x)^{1/x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto (\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 au voisinage de 0,

Exercice 16 : (★)

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \ln(1 + \frac{x^2}{1+x})$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto e^{\cos x} (1 + e^{-1/x^2})$ à l'ordre 5 au voisinage de 0,
3. $f : x \mapsto \cos(\ln(\cos x))$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
4. $f : x \mapsto \ln(2 + x + \sqrt{1+x})$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 17 : (★★)

Calculer le développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 de :

$$f : x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\right).$$

Exercice 18 : (★)

Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de :

$$f : x \mapsto \frac{e^{x^2} - 1}{\sin(x^2)}.$$

Exercice 19 : (★★)

Calculer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\cos x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \frac{x^2}{1 - \cos x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 20 : (★★)

Calculer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{1}{1 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto (1 + \operatorname{Arctan} x)^{\frac{x}{(\sin x)^2}}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Exercice 21 :

Calculer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de :

$$f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x).$$

Exercice 22 : (★)

Calculer le développement limité de $f : x \mapsto \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$ à l'ordre 13 au voisinage de 0.

Exercice 23 : (★★)

Calculer le développement limité de : $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(2 \sin x)$ à l'ordre 3 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$,

III Applications des développements limités

Exercice 24 :

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3},$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}.$

Exercice 25 : (★)

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - \sin x)}{\sqrt{1 + x^3} - 1},$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^{1/x} - e}{x},$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right).$

Exercice 26 : (★★)

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{1/(\sin x)^2},$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)^{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}},$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\left(\ln \frac{x+1}{x-1} \right)^2}.$

Exercice 27 :

Soit $f :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [\setminus \{0\}, x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$. Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

Exercice 28 :

Etudier la tangente en 0 et la position relative de la courbe par rapport à sa tangente pour la fonction :

$$x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 2)$$

Exercice 29 : (★)

Etudier la tangente en 1 et la position relative de la courbe par rapport à sa tangente pour la fonction :

$$x \mapsto x^{1 + \frac{1}{x}}.$$

Exercice 30 :

Etudier les éventuelles asymptotes à la courbe représentative de la fonction :

$$x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Exercice 31 : (★)

Etudier les éventuelles asymptotes de $f : x \mapsto \frac{x^2}{x-1} e^{1/x}$.

IV Relations de comparaison : cas de suites

Exercice 32 :

Trouver une suite simple équivalente à la suite :

- $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1},$
- $x_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$
- $x_n = n \sin \frac{1}{n^2},$
- $x_n = n^{1/n} - 1,$
- $x_n = \ln(n+1) - \ln(n),$
- $x_n = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right),$
- $x_n = \left(\tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right) \right)^\pi.$

Exercice 33 : (★★)

- Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = l, \text{ avec } l < 1.$$

Montrer que :

$$\lim x_n = 0.$$

- Soit $a > 0$, montrer que :

$$a^n = o(n!)$$

- Montrer que :

$$n! = o(n^n)$$

Exercice 34 :

Utiliser des équivalents pour calculer les limites suivantes :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \sin \frac{1}{n^2},$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^{1/n^2} - 1 \right),$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}.$$

Exercice 35 :

Utiliser des équivalents pour calculer les limites :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n,$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n-x}\right)^n,$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^n.$

V Problèmes d'analyse asymptotique

Exercice 36 : (★★)

Montrer que l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto xe^{x^2}$ est bijective. Former le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f^{-1} .

Exercice 37 : (★)

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution que l'on notera x_n .
- Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}.$$

En déduire la limite de (x_n) .

- Montrer que

$$x_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- Montrer que

$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Exercice 38 : (★) On pose : $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 2, u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

- Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} \leq u_n \leq 2\sqrt{n}.$$

- Montrer que : $u_n \sim n$.

- Déterminer : $\lim(u_n - \sqrt{n})$.

Exercice 39 : (★) On pose : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$. En déduire $\lim u_n$.
- Montrer que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
- Montrer que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- Montrer que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 40 : (★★)

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan x \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} = 1$ admet une unique solution dans $]n\pi, (n+1)\pi[$ notée x_n .
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_n - n\pi = \text{Arctan}\left(\frac{\text{sh } x_n}{\text{ch } x_n}\right)$. En déduire $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n\pi)$ et trouver un équivalent simple de $(x_n - n\pi - l)$.

Exercice 41 : (★★★)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$ que l'on note u_n .

Montrer que :

$$u_n = n + \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Exercice 42 : (★★) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx.$$

- Montrer que : $\lim I_n = 0$.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.
- Montrer que $\lim nI_n = 1$ puis que $\lim n(nI_n - 1) = -3$.
- Montrer que :

$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$