

I Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 :  Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels pour les lois usuelles?

- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -x + 3y + z = 0\}$,
- $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, xy = zt\}$,
- $G = \{(x, x + y, x + y + z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$,
- $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 2 :  Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels pour les lois usuelles?

- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y\}$,
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \text{ et } x - 3y = 0\}$,
- $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xy \geq 0\}$,
- $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), a + b + c + d = 0 \right\}$.

Exercice 3 : (★)

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

- $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = P(1)\}$,
- $E_2 = \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \int_0^1 f(t) dt = 0\}$,
- $E_3 = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$.

Exercice 4 : (★) On définit les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y - z = 0\}, F = \{(x, x, -x) \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}\}.$$

- Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $E \cap F$.
- On pose $u = (1, -1, 1)$ et $v = (3, 1, 7)$. Montrer que $\text{Vect}(u, v) \subset E$. A-t-on égalité?

Exercice 5 : (★★)

Soient F, G, H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Comparer :

- $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$,
- $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$.

Montrer que :

$$F \cap (G + (F \cap H)) = (F \cap G) + (F \cap H).$$

Exercice 6 : 

On pose :

$$F = \{(x, 2x, 3x), x \in \mathbb{R}\} \text{ et } G = \{(x + y, x + y, y), x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que :

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G.$$

Exercice 7 : (★★)

Soit $E = \mathbb{R}^4$. On pose $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)$, $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(u_3, u_4)$.

- Montrer que $F = \{(x, y, z, t) \in E, z = t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E, x - y = 0 \text{ et } x + y - 2z = 0\}$.
- Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Exercice 8 : (★★)

Soit $E = \mathbb{R}^3$

- (a) Soit $E_1 = \text{Vect}\{(0, 1, 1), (1, 0, 2)\}$. Trouver $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $E_1 \oplus \text{Vect}(x) = E$.
(b) Même question avec $E_2 = \text{Vect}\{(1, 2, 3), (2, 2, 0)\}$.
- (a) Soit $E_3 = \text{Vect}\{(1, 2, 2)\}$. Trouver $x, y \in \mathbb{R}^3$ tel que $E_3 \oplus \text{Vect}\{x, y\} = E$.
(b) Même question avec $E_4 = \text{Vect}\{(1, 0, 1)\}$.

Exercice 9 : (★★)

Soit E l'ensemble des suites convergentes.

On considère F l'ensemble des suites réelles tendant vers 0 et G l'ensemble des suites réelles constantes.

- Montrer que F et G sont des espaces vectoriels.
- Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

Exercice 10 : (★)

On pose : $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 11 : (★★)

On pose :

$$E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}),$$

$$F = \{f \in E, \int_0^1 f = 0, f(0) = 0, f'(1) = 0\},$$

$$G = \{x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

Exercice 12 : (★★★)

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et soient p réels $(a_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ deux à deux distincts dans $[0, 1]$. On pose :

$$F = \{f \in E, \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(a_i) = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E .

II Familles finies de vecteurs

Exercice 13 :

Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?

1. $x_1 = (1, 1, 0), x_2 = (0, 1, 1)$
2. $x_1 = (0, 0, 1), x_2 = (0, 1, 1), x_3 = (1, 1, 1)$
3. $x_1 = (0, 1, -1), x_2 = (1, 0, -1), x_3 = (1, -1, 0)$
4. $x_1 = (1, 1, -1), x_2 = (1, -1, 1), x_3 = (-1, 1, 1), x_4 = (1, 1, 1)$

Exercice 14 :

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soient $f_1 : x \mapsto |x|, f_2 : x \mapsto |x - 1|$ et $f_3 : x \mapsto |x + 1|$.

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

Exercice 15 : (★)

On pose $f_1 : x \mapsto \sin x, f_2 : x \mapsto \cos x, f_3 : x \mapsto x \sin x$ et $f_4 : x \mapsto x$.

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Exercice 16 : (★)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient $u_1, \dots, u_{n+1} \in E$.

Montrer que si $(u_1, \dots, u_n)$ est libre et $u_{n+1} \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors $(u_1, \dots, u_{n+1})$ est libre.

Exercice 17 : (★) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soient $a, b, c \in E$. On pose :

$$u = b + c, v = c + a, w = a + b.$$

Montrer que :

$$(a, b, c) \text{ est libre} \Leftrightarrow (u, v, w) \text{ est libre}.$$

Exercice 18 : (★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \cos^k(x).$$

Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 19 : (★) Les familles suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont-elles libres ou liées ?

1. $f_1 : x \mapsto \cos x, f_2 : x \mapsto \sin x, f_3 : x \mapsto 1,$
2. $f_1 : x \mapsto \cos^2 x, f_2 : x \mapsto \cos 2x, f_3 : x \mapsto 1,$

Exercice 20 : (★)

On définit les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1, v_n = n^2, w_n = 2^n.$$

Montrer que la famille $((u_n), (v_n), (w_n))$ est libre.

Exercice 21 : (★★)

Les familles suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont-elles libres ou liées ?

1. $f_i : x \mapsto e^{\lambda_i x}$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, deux à deux distincts,
2. $f_k : x \mapsto \sin kx, k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$

Exercice 22 : (★★)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille libre de E et soit $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de scalaires. Soit $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, v_i = u + e_i$.

Montrer que $(v_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est liée si et seulement si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = -1$.

Exercice 23 : (★★)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient $\mathcal{E} = (e_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ et $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ deux familles libres de vecteurs de E . On suppose que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i \in F_i$ où $F_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$. Montrer que :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, e_i \in E_i \text{ où } E_i = \text{Vect}(f_1, \dots, f_i).$$

Exercice 24 :

Montrer que $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + z = 0\}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 25 : (★)

Déterminer une base de :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = P(2) = 0\}.$$

Exercice 26 : (★)

Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0 \text{ et } 2x + y + 3z = 0\}$

- $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 3y - z = t\}$
- $F_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)\}$.

Exercice 27 : (★)

On pose $e_1 = (1, 3, 0, 1)$, $e_2 = (3, 2, 1, 4)$, $e_3 = (8, 3, 3, 11)$ et $e_4 = (5, 8, 1, 6)$.
Déterminer une base de $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Exercice 28 :

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$. On pose :

$$E = \{P \in \mathbb{C}_4[X], P(a) = 0, P(b) = 0\}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_4[X]$ et déterminer une base de E .

III Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 29 :

Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -x + 3y + z = 0\}$
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \text{ et } x - 3y = 0\}$
- $\{P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = 0\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
- $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ae^x + bx, a, b \in \mathbb{R}\}$

Exercice 30 :

Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + 3z = 0\}$
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 2y = 3z\}$
- $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0, y + z = 0, z + t = 0, t + x = 0\}$
- $\{P \in \mathbb{R}_4[X], P(1) = 0\}$

Exercice 31 : (★) On pose :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, x + y + z = 0 \text{ et } x + iy - z = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ et en déterminer une base et sa dimension.

Exercice 32 : (★)

On pose : $F = \{P \in \mathbb{C}_5[X], P(-X) = -P(X)\}$.

- Calculer la dimension de F .
- Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{C}_5[X]$.

Exercice 33 : (★)

Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ la famille (e_1, e_2) avec :

$$e_1 = (1, 1, 1, 1) \quad e_2 = (1, 1, -1, -1).$$

Exercice 34 : Déterminer le rang des familles suivantes :

- $x_1 = (1, -1, 1), x_2 = (-1, 1, -1), x_3 = (0, 1, 1), x_4 = (1, 0, 2),$
- $x_1 = (1, 1, 0, 1), x_2 = (1, -1, 1, 0), x_3 = (2, 0, 1, 1), x_4 = (0, -2, 1, -1),$
- $x_1 = (1, 0, 2, 3), x_2 = (7, 4, 2, -1), x_3 = (5, 2, 4, 7).$

Exercice 35 : (★)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $u \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$. On pose $\mathcal{B}' = (e_1 - u, \dots, e_n - u)$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{B}'$ soit une base de E .

Exercice 36 : Déterminer le rang des familles suivantes de $\mathbb{R}^4$:

- $x_1 = (0, 1, 1, 1), x_2 = (1, 0, 1, 1), x_3 = (1, 1, 0, 1), x_4 = (1, 1, 1, 0),$
- $x_1 = (0, 1, 0, 1), x_2 = (1, -1, 1, -1), x_3 = (1, -1, -1, 1), x_4 = (1, 1, 1, 1).$

Exercice 37 : (★) Déterminer le rang des familles suivantes de $\mathbb{R}[X]$:

- $(3, X^2 + 1, X^5 - 3X^2 + 2),$
- $(X^k(X - 1)^{n-k})_{k \in [0, n]}.$

IV Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

Exercice 38 :

Posons $F = \text{Vect}(1, X + 1, X^3 - X^2)$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 39 : (★)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des familles finies de E .
Montrer que :

$$\text{rg}(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}') \leq \text{rg}(\mathcal{F}) + \text{rg}(\mathcal{F}').$$

Exercice 40 : (★) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs suivants : $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0)$, $w = (1, 1, 1, 1)$, $x = (0, 0, 1, 0)$, $y = (1, 1, 0, -1)$. On pose $F = \text{Vect}(u, v, w)$ et $G = \text{Vect}(x, y)$.
Quelles sont les dimensions de F , G , $F \cap G$?

Exercice 41 : (★★)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soit une famille de n vecteurs de E de rang s . Etant donnée une sous-famille de r vecteurs de rang s' , montrer que $s' \geq r + s - n$.

Exercice 42 : (★★)

On pose :

$$E = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0\},$$

$$F = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} + x_n = 0\}, G = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0\}.$$

1. Montrer que :

$$E = F \oplus G.$$

2. En déduire $\dim E$.