

I Révisions de calcul intégral

Exercice 1 :  Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^1 (t^2 + t + 1)e^{-t} dt$
2. $\int_1^e t^n \ln(t) dt$ où $n \in \mathbb{N}$
3. $\int_0^2 \frac{\text{Arcsin}(\frac{t}{2})}{\sqrt{4-t^2}} dt$

Exercice 2 :  Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 (\ln t)^2 dt$
2. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$
3. $\int_1^e \frac{\ln(t)}{t + t(\ln t)^2} dt$

Exercice 3 : (★)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1. Calculer u_0 et u_1 . Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_{n-1} - \frac{1}{n!}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est monotone et convergente et calculer sa limite.
3. En déduire que :

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Exercice 4 : 

Calculer :

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

Exercice 5 : 

Calculer :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^3} dx.$$

II Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Exercice 6 : 

Calculer :

$$\int_{-1}^2 x|x| dx \text{ et } \int_{-1}^1 x|x| dx.$$

Exercice 7 :  Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x^3} \frac{dt}{(\ln t)^2}.$$

Exercice 8 : 

Soient $f, g \in C^0([a, b])$. On suppose que f et g sont monotones de même sens de variations.

1. Montrer que :

$$\forall x, y \in [a, b], (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0.$$

2. En déduire que :

$$\left(\int_a^b f \right) \left(\int_a^b g \right) \leq (b-a) \int_a^b fg.$$

Exercice 9 : (★)

Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt.$$

Exercice 10 : (★★★) 

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \left(\int_a^b f(x)^n dx \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Montrer que la suite (I_n) converge vers $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$.

Exercice 11 : (★★)

Soit $f \in C^0([0, +\infty[)$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

Soit $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = l.$$

Exercice 12 : (★)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \int_0^x g(t) dt \text{ et } g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que f et g sont égales à la fonction constante nulle.

Exercice 13 : (★★)

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que :

$$\int_0^1 f(t) dt = 0 \text{ et } \int_0^1 t f(t) dt = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $]0, 1[$.

Exercice 14 : (★) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ telle que $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4$. Calculer $\int_0^1 (f^2 - f)^2$. En déduire toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ vérifiant $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4$.

Exercice 15 : (★★)

Soit f continue sur $[a, b]$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_a^b x^k f(x) dx = 0.$$

Montrer que f admet au moins $n + 1$ zéros sur $]a, b[$.

Exercice 16 : (★★)

1. Soient $a < b$, soit f continue sur $[a, b]$, soit g continue sur $[a, b]$ et positive.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$.

2. Soit f continue au voisinage de 0.

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt$.

III Sommes de Riemann

Exercice 17 :

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 18 :

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2},$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2},$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}}.$$

Exercice 19 : (★) Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\prod_{k=1}^n (n+k) \right)^{\frac{1}{n}},$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 20 : (★)

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2 + k^2}.$$

Exercice 21 : (★★)

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}$$

IV Lien entre intégrale et primitive

Exercice 22 :

On considère la fonction :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_{-x}^{x^2} \frac{dt}{\operatorname{ch} t}.$$

Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 23 : (★)

On considère la fonction :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x \operatorname{Arctan}(t + x^2) dt.$$

Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 24 : (★)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\left(\forall \alpha, \beta \in [a, b], \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0 \right) \Rightarrow (\forall x \in [a, b], f(x) = 0).$$

Exercice 25 : (★★)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{+\infty} f = a > 0$.

1. Montrer que :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_y^{y+a} f(t) dt = al.$$

2. En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x (f(t+a) - f(t)) dt = - \int_0^a f(t) dt + al.$$

3. Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x (\text{Arctan}(t+1) - \text{Arctan}(t)) dt.$$

Exercice 26 : (★★)

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On considère la fonction F définie par :

$$\forall x \in [0, 1], F(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt.$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Calculer F' et en déduire que :

$$\forall x \in [0, 1], F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t) dt \right) du.$$

Exercice 27 : (★★)

Soit f continue et positive sur $\mathbb{R}^+$.

On suppose qu'il existe un nombre réel k positif tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) \leq k \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que f est nulle.

Exercice 28 : (★★)

On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_1^{e^{tx}} \frac{e^{tx}}{t} dt. \end{aligned}$$

Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 29 : (★★★)

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$, $f \geq 0$, $g \geq 0$ et soit $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x) \leq C + \int_0^x f g.$$

Montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x) \leq C \exp \left(\int_0^x g \right).$$

V Inégalité de Taylor-Lagrange**Exercice 30 :**

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

Exercice 31 : (★)

Montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Exercice 32 : (★★)

Soit $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Montrer que pour $x \in [-a, a]$ on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2a} |f(a) - f(-a)| + \frac{a^2 + x^2}{2a} \sup_{t \in [-a, a]} |f''(t)|$.