

I Espérance

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, P(X = k) = \frac{k}{21}.$$

1. Montrer que la loi X est bien définie.
2. Calculer $E(X)$.
3. Calculer $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit r tel que $0 \leq r \leq n$.

Un placard contient n paires de chaussures. On tire, au hasard, $2r$ chaussures du placard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de paires complètes parmi les chaussures tirées.

Les paires du placard sont numérotées de 1 à n . Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la $i^{\text{ème}}$ paire se trouve parmi les chaussures tirées et 0 sinon.

1. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer la loi et l'espérance de X_i .
2. Déterminer l'espérance de X .

Exercice 3 : (★)

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n .

Soit T une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$. On tire T boules de l'urne.

On note X la somme des numéros des boules tirées.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note Y_k la variable aléatoire valant 1 si la k -ème boule est tirée et 0 sinon.

1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer la loi de Y_k .
2. Exprimer X en fonction des variables Y_k , $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
3. En déduire $E(X)$.

Exercice 4 : (★)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer l'espérance de $U = \max(X, Y)$ et de $V = \min(X, Y)$.

Exercice 5 : (★★)

Une urne U_1 contient trois boules numérotées de 1 à 3 et une urne U_2 contient trois boules numérotées de 4 à 6.

On effectue une succession de lancers d'un dé à 6 faces. A chaque lancer, on change d'urne la boule portant le numéro donné par le dé. On note X_n le nombre de boules dans l'urne U_1 à l'issue du n -ième lancer.

1. Déterminer les lois de X_1 et X_2 .
2. Déterminer $P(X_{n+1} = k)$ en fonction de $P(X_n = i)$ pour $i \in X_n(\Omega)$.
3. Donner une relation de récurrence entre $E(X_{n+1})$ et $E(X_n)$. En déduire $E(X_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 : (★★)

Soit $p \in [0, 1]$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine 0. A chaque instant elle fait un bond d'une unité vers la droite avec une probabilité p ou vers la gauche avec la probabilité $1 - p$. A l'instant initial, la puce est à l'origine.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la position de la puce à l'instant n .

Déterminer la loi de X_n ainsi que son espérance.

II Variance, écart type et covariance

Exercice 7 :

Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires.

Un joueur tire successivement et avec remise 6 boules de l'urne.

Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 3€ et pour chaque boule noire tirée, il perd 5€.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées et Y la variable aléatoire égale au gain obtenu.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X .
2. Déterminer l'espérance et la variance de Y .

Exercice 8 :

Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables ou toucher. On tire simultanément 3 boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées. Déterminer la variance de X .

Exercice 9 : (★★)

On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. A chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on marque un point.

Pour $n \geq 2$, soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issu de n lancers.

- Déterminer les lois, les espérances et les variances de X_2 et X_3 .
- Soit $n \geq 2$, quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n ? Déterminer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n - 1)$.
- Soit $n \geq 2$, soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que :

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(X_n = k) + \frac{1}{2}P(X_n = k - 1).$$

- Soit $n \geq 2$. On pose :

$$Q_n: \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) s^k. \end{array}$$

- Soit $n \geq 2$. Calculer $Q_n(1)$ et montrer que $Q'_n(1) = E(X_n)$. Exprimer $V(X_n)$ à l'aide de la fonction Q_n .
- Montrer que, pour tout $n \geq 2$, pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$Q_{n+1}(s) = \frac{1+s}{2} Q_n(s).$$

- En déduire une expression de $Q_n(s)$ en fonction de n et de s .
- Calculer alors, pour tout $n \geq 2$, l'espérance et la variance de X_n .

Exercice 10 : (★★)

Soit $n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on tire deux boules sans remise. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au plus petit (resp. au plus grand) des deux numéros obtenus.

- Déterminer la loi de Y .
- Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
- Déterminer la loi de X .
- Montrer que les variables aléatoires Y et $n + 1 - X$ ont même loi. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 11 : (★★)

Soit $n \geq 2$, soit $p \in]0, 1[$. Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs respectivement dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ et $\llbracket 1, n \rrbracket$ telles que :

$$\forall (j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, P((X, Y) = (j, k)) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k = j \neq 0 \\ \frac{(1-p)^n}{n} & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Déterminer la loi de X et la loi de Y .
- Calculer l'espérance de Y .
- Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
- Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = j$.
- Calculer la covariance de X et Y . Existe-t-il des valeurs de p telles que X et Y soient décorrélées?

III Inégalités probabilistes**Exercice 12 : (★)**

Une machine A fabrique 100 pièces dont 5% sont défectueuses. Une machine B , indépendante de A , fabrique 400 pièces dont 10% sont défectueuses. Soit X (resp. Y) la variable aléatoire donnant le nombre de pièces défectueuses pour A (resp. B).

- Déterminer les lois de X et Y .
- Soit $Z = X + Y$. Déterminer $E(Z)$ et $V(Z)$.
- Déterminer une valeur c pour laquelle le risque que le nombre de pièces défectueuses dans l'ensemble de la production soit supérieur à c est inférieur à 5%.

Exercice 13 : (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $X \sim \mathcal{B}(4n, \frac{1}{2})$.

- Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
- En utilisant l'inégalité de Markov, majorer $P(X \geq 3n)$.
- En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer $P(X \geq 3n)$.
- En utilisant l'inégalité de Markov appliquée à $Y = 2^X$, majorer $P(X \geq 3n)$.
- Comparer les résultats obtenus.

Exercice 14 : (★★)

Soit X une variable aléatoire réelle, soit $a > 0$.

- Montrer que :

$$\forall t \geq 0, P(X - E(X) \geq a) \leq \frac{t^2 + V(X)}{(t + a)^2}.$$

- En déduire que :

$$P(X - E(X) \geq a) \leq \frac{V(X)}{V(X) + a^2}.$$

- En déduire l'inégalité de Cantelli :

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{2V(X)}{V(X) + a^2}.$$