

I Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Exercice 1 : 


Calculer :

$$d_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \text{ et } d_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2 : 

Calculer :


$$d = \begin{vmatrix} 50 & -10 & 0 \\ 75 & 0 & 4 \\ -175 & 40 & 24 \end{vmatrix}$$

Exercice 3 : (★) 

Soit $x \in \mathbb{R}$, on considère le déterminant suivant :

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x^2 - 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -x^2 + 6 \end{vmatrix}.$$

1. Donner quatre racines évidentes de D .
2. Montrer que D est une fonction polynomiale dont on déterminera le degré.
3. En déduire la valeur de $D(x)$ sans développer entièrement le calcul de déterminant.

Exercice 4 :  Soient $P_1 = 1 + X - X^2$, $P_2 = 3 - X + 5X^2$ et $P_3 = -1 + 2X + 3X^2$. La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

II Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 5 : 

On pose :

$$\begin{aligned} u & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \rightarrow M^T. \end{aligned}$$

Calculer $\det(u)$.

Exercice 6 : 

Soit $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto (XP)'$. Calculer $\det(u)$.

Exercice 7 : (★)

Soit φ l'application qui, à tout polynôme réel P de degré inférieur ou égal à 2, associe Q défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt.$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et calculer $\det(\varphi)$.

Exercice 8 : (★★)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle sont les valeurs possibles pour le déterminant de $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 + 2f = 0$?

III Déterminant d'une matrice carrée

Exercice 9 : (★)

1. Montrer que pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$:

$$u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = \begin{vmatrix} u & v & w \\ w & u & v \\ v & w & u \end{vmatrix}.$$

2. Soient $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{C}$. On pose : $X = ax + by + cz$, $Y = bx + cy + az$ et $Z = cx + ay + bz$. Montrer que :

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz).$$

Exercice 10 : 

Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul.

Exercice 11 : (★)

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 canoniquement associé à :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1, 1)$ et $u_4 = (-1, 0, 0, 1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
2. Déterminer $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Déterminer $\det B$, $\det f$ et $\det A$.

Exercice 12: (★)

Soit $n \geq 3$, soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,j} = \sin(a_i + a_j).$$

Exercice 13: (★★)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On rappelle que $\text{tr}(A) = a + d$ et que A est dite nilpotente ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = 0$.


1. Montrer que : $A^2 = \text{tr}(A) \cdot A - (\det A) I_2$.
2. Montrer que A est nilpotente ssi $\det(A) = \text{tr}(A) = 0$.

IV Calcul des déterminants

Exercice 14: 

Déterminer les $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels la matrice $M(\lambda)$ est inversible, où :

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ 7 & -5 - \lambda & 1 \\ 6 & -6 & 2 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Exercice 15: 

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - a - c & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{pmatrix}.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que A soit inversible.

Exercice 16: 

Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,j} = \inf(i, j).$$

Exercice 17: (★★)

Calculer $\det A$ où $A = ((i - j))_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Exercice 18: (★★) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$, on note $\Delta_{n,p}$ le déterminant d'ordre p suivant :

$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix}$$

où l'on a posé : $\forall k, j \in \mathbb{N}^*, \binom{k}{j} = 0$ si $k < j$.

Montrer, en effectuant des opérations sur les colonnes que pour $p \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}, \Delta_{n,p} = \Delta_{n+1,p}$.

En déduire la valeur de $\Delta_{n,p}$.

Exercice 19: (★)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que l'application :

$$u_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), M \mapsto AM$$

est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(u_A) = (\det(A))^2$.

Exercice 20: 

Soit $n \geq 2$. On pose :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Déterminer une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n+1} et en déduire la valeur de Δ_n en fonction de n .

Exercice 21: (★) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $M_n \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que :

$$M_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b & a & 0 & \vdots \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

Montrer que :

$$\det(M_n) = (a^2 - b^2)^n.$$

Exercice 22 : (★)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 23 : (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(a, b) \neq (0, 0)$. Calculer $\det M_n$ où $M_n = (m_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{i,j} = \begin{cases} a+b & \text{si } i = j \\ ab & \text{si } j = i+1 \\ 1 & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 24 : (★★)

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ des nombres complexes de module 1 et tous différents. Soient $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{C}$. Montrer que la suite :

$$\left(\sum_{k=1}^s a_k \lambda_k^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

est convergente de limite nulle ssi tous les complexes a_1, \dots, a_s sont nuls.

Exercice 25 : (★★★)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| < \varepsilon \Rightarrow A + xB \in GL_n(\mathbb{R}).$$