


I Produit scalaire

Exercice 1 : 

Soit :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1). \end{aligned}$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2 : 

On pose :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X], (P|Q) = \sum_{k=0}^2 P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1).$$

Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

II Norme associée à un produit scalaire

Exercice 3 : 

Montrer que :

$$\forall x, y, z \in E, \|x - z\|^2 \leq 2(\|x - y\|^2 + \|y - z\|^2).$$

Exercice 4 : (★)

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. On pose :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

1. Montrer que :

$$\forall x, y \in E \setminus \{0\}, \|f(x) - f(y)\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

2. Soient $a, b, c, d \in E$, montrer que :

$$\|a - c\| \cdot \|b - d\| \leq \|a - b\| \cdot \|c - d\| + \|b - c\| \cdot \|a - d\|.$$

Il s'agit de l'inégalité de Ptolémée.

Exercice 5 : (★) 

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2.$$

Etudier le cas d'égalité.

Exercice 6 : (★)

Soient $a < b$, soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ telle que f ne s'annule pas sur $[a, b]$.

Montrer que :

$$\int_a^b f(t) dt \cdot \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \geq (b - a)^2.$$

Exercice 7 : (★)

Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[0, 1]$. Montrer que :

$$\left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(t)^3 dt \right) \left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)} dt \right).$$

Exercice 8 : (★) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in E, \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 \leq n \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

Exercice 9 : (★★)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ positive. Soit $A = \int_0^1 f$. Montrer que :

$$\sqrt{1 + A^2} \leq \int_0^1 \sqrt{1 + f(x)^2} dx \leq 1 + A.$$

Exercice 10 : (★)

On considère l'espace $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et on pose :

$$\forall f, g \in E, \langle f, g \rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

2. Établir que :

$$\forall f \in E, \left(f(1) + \int_0^1 f'(t) dt \right)^2 \leq 2 \left(f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \right).$$

III Orthogonalité

Exercice 11 : (★★)

Soit E un espace préhilbertien. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E . Montrer que :

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp,$$

$$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$$

Exercice 12 : (★★) On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$$\forall f, g \in E, (f|g) = \int_0^1 f g.$$

On considère l'espace vectoriel $H = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

1. Soit $f \in H^\perp$. On pose $g : t \mapsto t f(t)$. Que peut-on dire de f et g ? En déduire que $f = 0$.
2. En déduire H^\perp et $H^{\perp\perp}$.

Exercice 13 : (★★)

Déterminer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales $D_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14 : (★★)

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, et on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Pour tout $0 \leq p \leq n$, on pose $Q_p(X) = X^p(X-1)^p$ et $L_p(X) = Q_p^{(p)}$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
2. Montrer que L_p est un polynôme dont on précisera son degré et son coefficient dominant.
3. Calculer par intégration par parties $\langle L_p, L_q \rangle$ pour $p \neq q$. En déduire que (L_0, \dots, L_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Déterminer enfin la norme euclidienne de L_p .

Exercice 15 :

Orthonormaliser pour le produit scalaire canonique la famille de \mathbb{R}^3 :

$$u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 1, 1).$$

Exercice 16 :

Orthonormaliser, pour le produit scalaire usuel, la base suivante de \mathbb{R}^4 :

$$u_1 = (0, 1, 1, 1), u_2 = (1, 0, 1, 1), u_3 = (1, 1, 0, 1), u_4 = (1, 1, 1, 0).$$

Exercice 17 : (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose :

$$\forall P, Q \in E, (P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

1. Montrer que $(\cdot | \cdot)$ définit un produit scalaire sur E .
2. On pose $n = 3$. Orthonormaliser la base canonique de E pour le produit scalaire $(\cdot | \cdot)$.

Exercice 18 : (★)

Montrer que l'application suivante est un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) &\mapsto (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) \end{aligned}$$

Orthonormaliser pour ce produit scalaire la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Exercice 19 : (★)

$$\varphi : \mathbb{R}_2[X]^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

On définit $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^2 P(k)Q(k)$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire.
2. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

IV Bases orthonormées d'un espace euclidien

Exercice 20 :

Soit E un espace euclidien, soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. On suppose que les matrices de f et de g dans une base orthonormée sont respectivement symétriques et antisymétriques.

Montrer que :

$$\forall x \in E, (f(x)|g(x)) = 0,$$

et

$$\forall x \in E, \|(f - g)(x)\| = \|(f + g)(x)\|.$$

Exercice 21 : (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $e_1, \dots, e_n \in E$ tels que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|e_i\| = 1 \text{ et } \forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (e_k|x)^2.$$

Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une famille orthonormale de E , puis que c'est une base de E . En déduire que E est de dimension finie.

Exercice 22 : (★★)

Soit E un espace euclidien et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x, y \in E, (\varphi(x)|\varphi(y)) = (x|y).$$


1. Montrer que :

$$\ker(\varphi - id_E) = \text{Im}(\varphi - id_E)^\perp.$$

2. Montrer que :

$$(\varphi - id_E)^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \varphi = id_E.$$


V Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Exercice 23 : 

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X], (P|Q) = \sum_{k=0}^2 P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0).$$

Déterminer le supplémentaire orthogonal de $F = \text{Vect}(1 + X, X^2)$.

Exercice 24 : 

On se place dans \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire usuel.

On pose :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0, x - y + z - t = 0\}.$$

Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F .

Exercice 25 : 

On se place dans \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire usuel.

On pose :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y + 3z + 4t = 0, x + 3y + 5z + 7t = 0\}.$$

Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F .

Exercice 26 :  

Soit E un espace euclidien. Soit $u \in E \setminus \{0\}$ et soit $H = (\text{Vect}(u))^\perp$. Soit p la projection orthogonale sur H et s la symétrie orthogonale par rapport à H , c'est-à-dire la symétrie par rapport à H parallèlement à H^\perp .

1. Montrer que :

$$\forall x \in E, p(x) = x - \frac{(x|u)}{\|u\|^2} u.$$

2. Montrer que :

$$\forall x \in E, s(x) = x - 2 \frac{(x|u)}{\|u\|^2} u.$$

Exercice 27 : (★)

Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthogonale de E .

Montrer qu'il existe $u \in E \setminus \{0\}$ tel que les projections orthogonales de e_1, \dots, e_n sur $\text{Vect}(u)$ aient toutes la même norme.

Exercice 28 : (★★)

Soit p un projecteur de E espace vectoriel euclidien. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si :

$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Exercice 29 : (★) On considère \mathbb{R}^4 muni de sa structure euclidienne canonique.

On pose $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$, avec $e_1 = (1, 0, 1, 0)$ et $e_2 = (1, -1, 1, -1)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F .

2. Déterminer l'orthogonal de F .

3. Ecrire la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

4. Calculer la distance du vecteur $(1, 1, 1, 0)$ à F .

Exercice 30 : (★)

On se place dans \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire usuel.

On pose $x = (2, 2, 3, 4)$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y - 3z + t = 0\}$. Déterminer :

$$d(x, F).$$

Exercice 31 : (★)

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X], (P|Q) = \sum_{k=0}^2 P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1).$$

On pose $U = X^2 - 1$. Calculer :

$$d(U, \mathbb{R}_1[X]).$$

Exercice 32 : (★★) Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit :

$$\forall P, Q \in E, (P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

1. Montrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur E . E est-il un espace euclidien ?

2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

3. En traduisant ce problème en termes de distance à un sous-espace, calculer :

$$\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt.$$

Exercice 33 : (★★)

On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$\left\langle \sum_{i=0}^3 a_i X^i, \sum_{i=0}^3 b_i X^i \right\rangle = \sum_{i=0}^3 a_i b_i.$$

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = 0\}$. Déterminer :

$$d(X^3 + 2X^2 - X + 1, F).$$

Exercice 34 : (★★)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel.

Soit U la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculer :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bU\|.$$

Exercice 35 : (★★)

On note $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ défini par :

$$\forall f, g \in E, (f | g) = \int_{-1}^1 fg.$$

On note $\|\cdot\|$ la norme associée à $(\cdot | \cdot)$ et d la distance associée à $\|\cdot\|$.

Soit I (resp. P) l'ensemble des fonctions impaires (resp. paires).

1. Montrer que I et P sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires orthogonaux dans E .
2. Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2+x}$. Calculer $d(f, P)$.