

I Ouverts de \mathbb{R}^2 , fonctions continues

Exercice 1:

Soit $a > 1$. On pose :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^a} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de a la fonction $g: t \mapsto f(t, t)$ est-elle continue en 0?
2. Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?

Exercice 2:

Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en $(0, 0)$ pour les fonctions f suivantes :

1. $f(x, y) = \frac{x^5 y^3}{x^6 + y^4}$,
2. $f(x, y) = \frac{1 + x + y}{x^2 - y^2}$,
3. $f(x, y) = \frac{\sin x - y}{x - \sin y}$.

Exercice 3:

Etudier la continuité des fonctions suivantes de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} :

1. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$,
2. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$,
3. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$,

Exercice 4: (★)

Déterminer l'ensemble de continuité des applications f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} suivantes :

1. $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$,
2. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^x - e^y}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ e^x & \text{si } x = y \end{cases}$.

II Dérivées partielles

Exercice 5:

Si elles existent, calculer les dérivées partielles premières en $(0, 0)$ des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$,
2. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.
3. $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^x & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Exercice 6:

Soient $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x, y) = \int_0^y (x - t)\varphi(t) dt.$$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et calculer ses dérivées partielles premières.

Exercice 7: (★)

Les fonctions suivantes sont-elles de classe \mathcal{C}^1 au point $(0, 0)$? Si oui, calculer leur gradient en ce point.

1. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$,
2. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Exercice 8 : (★★)

On pose $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y), y \in \mathbb{R}^+\}$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in \mathbb{R}^{-*} \\ y^2 & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^+ \\ y^3 & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^{-*} \times \mathbb{R}^+ \end{cases}.$$

1. Montrer que U est ouvert et que f est de classe C^1 sur U . Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. La fonction f est-elle constante par rapport à x sur U ? Expliquer.

Exercice 9 : (★★★)

Etudier et simplifier la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x, y) = \text{Arccos} \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}}.$$

Exercice 10 : (★★)

Soit f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Si elles existent, on appelle dérivées partielles secondes, les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ et on note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 en tout point. Comparer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.
3. La fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ est-elle continue?

III Dérivées partielles et composées**Exercice 11 :** 

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. On pose :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = f(2t, 1 + t^2).$$

Calculer g' .

Exercice 12 : 

Soit f de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $(x, y) \mapsto xf(x, y)$,
2. $(x, y) \mapsto f(x + y, x - y)$,
3. $(x, y) \mapsto f(y, f(x, x))$,
4. $(x, y) \mapsto f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$.

Exercice 13 : (★★)

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$. On recherche toutes les fonctions $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x, y) \in D, x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

1. Vérifier que $\varphi : (x, y) \mapsto \frac{y}{x}$ est solution du problème.
2. Soit $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que $g \circ \varphi$ est solution du problème.
3. Soit f une solution, montrer que $f(u, uv)$ ne dépend que de v .
4. Donner l'ensemble des solutions.


Exercice 14 : (★★)

Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0\}$ dans \mathbb{R} telles que :

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = kf,$$

où $k \in \mathbb{R}$.

On pourra poser $g : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ et étudier $\frac{\partial(f \circ g)}{\partial \theta}$. Existe-t-il une solution continue sur \mathbb{R}^2 ?

IV Extremums**Exercice 15 :** 

Déterminer les extremums locaux et globaux de :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2(1 + y)^3 + y^4.$$

Exercice 16 : 

Déterminer les extremums locaux et globaux des applications f suivantes :

1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^3 + xy^2 - x^2y - y^3,$
2. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x + y)^2 + x^4 + y^4,$

Exercice 17 : (★)

Déterminer les extremums locaux et globaux des applications f suivantes :

$$1. \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2 ,$$

$$2. \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 2x^4 - 3x^2y + y^2 ,$$

$$3. \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2y + \ln(1 + y^2) .$$