

I Equations différentielles linéaire du premier ordre

Exercice 1 :

Résoudre les équations suivantes sur \mathbb{R}^{+*} :

$$1. \quad y' + \frac{1}{x}y = 0 \quad \left| \quad 2. \quad y' - \frac{2}{x^3}y = 0$$

Exercice 2 : (★)

Résoudre sur $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$:

$$(x^2 - 2)y' + 6xy = 0.$$

Exercice 3 :

Résoudre l'équation différentielle :

$$2y' - y = \sin x.$$

Exercice 4 :

Résoudre les équations différentielles suivantes, en cherchant d'abord une solution évidente :

1. $y' - 2xy = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$,
2. $y' + y \sin x = \sin 2x$.

Exercice 5 :

Soit l'équation différentielle :

$$(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1.$$

1. Trouver une solution polynomiale.
2. En déduire l'ensemble des solutions sur $] -1, +\infty[$.
3. Déterminer la solution vérifiant $y(1) = 1$.

Exercice 6 : (★★)

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f(-x) = 1.$$

Exercice 7 : (★)

Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que les deux équations différentielles $y' - y = 1 - x$ et $xy' - y = f(x)$ aient au moins une solution commune $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 8 : (★★★)

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 et telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

Exercice 9 :

Résoudre :

$$y' + y = 2e^x + 4 \sin x + 3 \cos x$$

Exercice 10 : (★)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $x' + x = \sin t + 3 \sin 2t$,
2. $(1+t^2)x' + x = \operatorname{Arctan} t$.

Exercice 11 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- a. $y' + 2y = x^2$
- b. $y' - y = (x+1)e^x$

Exercice 12 :

Résoudre les équations différentielles :

1. $y' - xy = xe^{x^2/2}$ sur \mathbb{R} ,
2. $x(x-1)y' + (2x-1)y = 1$ sur $]0, 1[$,
3. $xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 13 : (★)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- a. $(1-x)y' + y = \frac{x-1}{x}$ sur $]0, 1[$
- b. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur \mathbb{R}

Exercice 14 : (★★)

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(x \ln x)y' - y = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) \text{ sur }]1, +\infty[$$

II Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Exercice 15 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $y'' + 2y' + y = 0$
3. $y'' + 2y' + 4y = 0$ dans \mathbb{R}
4. $y'' + 2y' + 4y = 0$ dans \mathbb{C}
5. $y'' - y' + (1 + i)y = 0$

Exercice 16 : (★★)

Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution sur $]0, +\infty[$ de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée.

Exercice 17 : (★★)

Résoudre l'équation suivante sur $] -1, 1[$:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0.$$

On pourra poser $x = \sin t$.

Exercice 18 : (★★)

Résoudre l'équation suivante sur \mathbb{R} :

$$y'' + 2xy' + x^2y = 0.$$

On pourra poser $z = e^{x^2/2}y$.

Exercice 19 : (★★)

Soit $m \in \mathbb{R}^*$, on considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : (1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + m^2 y = 0.$$

Résoudre (E) sur \mathbb{R} . On pourra poser $x = \tan t$.

Préciser les solutions dans le cas particulier où $m = 2$.

Exercice 20 : (★★)

Résoudre l'équation suivante sur \mathbb{R}^{++} :

$$xy'' + 2(x + 1)y' + (x + 2)y = 0$$

On pourra poser $z = xy$.

Exercice 21 : (★)

Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x).$$

Exercice 22 : (★★)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur \mathbb{R} , telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\alpha - x).$$

Exercice 23 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $y'' - 4y' + 4y = e^x$,
2. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$,
3. $y'' + y = \frac{1}{4} \cos 3x$,
4. $y'' + y = \frac{3}{4} \cos x$

Exercice 24 : (★★)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1.$$

Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$. On pourra poser $z = x^2 y$.

Exercice 25 : (★★)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2 y'' + 3xy' + y = (x + 1)^2.$$

Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$. On pourra poser $x = e^t$.

Exercice 26 :

Résoudre :

$$y'' + y = \cos^3 x.$$

Exercice 27 : (★)

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2y' + y = 2\operatorname{sh} x.$$

Exercice 28 : (★★)

Résoudre l'équation différentielle suivante, avec $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$y'' - 2y' + \lambda y = e^{2x} + e^x \sin x.$$