

### I Ensembles

#### Exercice 1 : (★★)

1. Il suffit de prouver l'inclusion  $\mathbb{R} \subset \{x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, x < \varepsilon\}$ , l'autre inclusion étant évidente.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on veut montrer que :  $\exists \varepsilon > 0, x < \varepsilon$ . Posons  $\varepsilon = \dots$ , (on pourra utiliser une valeur absolue), on montre que  $\varepsilon > 0$  et que  $x < \varepsilon$ .

2. On raisonne par double inclusion.

Pour montrer que  $\{0\} \subset \{x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon\}$ , il suffit de montrer que  $x = 0$  vérifie  $\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$ .

Pour montrer que  $\{x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon\} \subset \{0\}$ , on va raisonner par l'absurde.

Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$ . Supposons que  $x \neq 0$ . Posons  $\varepsilon = \dots > 0$ , montrer que  $|x| \geq \varepsilon$  ce qui est absurde.

#### Exercice 2 : (★★)

1.  $f_1$  et  $f_2$  sont paires.

*Solution : A est un sous-ensemble de E.*

2.  $g_2$  n'est pas paire.

*Solution : B n'est pas un sous-ensemble de E.*

3. Soit  $f \in C$ . Prendre  $x = y = 0$  pour montrer que  $f(0) = 0$  puis  $y = 0$  pour montrer que  $f$  est paire.

*Solution : C est un sous-ensemble de E.*

#### Exercice 3 : (★★)

Raisonnez par double inclusion pour montrer que  $A = B$ .

#### Exercice 4 : (★★)

Utiliser les inclusions entre un ensemble et une réunion (resp. une intersection) d'ensembles.

#### Exercice 5 : (★)

Prouver une implication en raisonnant par double inclusion.

#### Exercice 6 : (★)

Considérer un élément  $x \in C$  et traiter les deux cas :  $x \in A$  et  $x \in B$ .

#### Exercice 7 : (★★)

Raisonnez par analyse-synthèse.

*Solution : Si  $B \not\subset A$ , l'équation n'a pas de solution, sinon les solutions sont les  $X$  tels que  $B \subset X \subset B \cup \bar{A}$ .*

#### Exercice 8 : (★)

Traduire "privé" en terme de complémentaire.

Trouver un contre-exemple pour prouver que l'inclusion réciproque est fausse.

#### Exercice 9 : (★★)

Raisonnez par chaîne d'implications.

#### Exercice 10 : (★)

1. Utiliser la distributivité de la réunion et de l'intersection.

2. Calculer  $\bar{A} \Delta \bar{B}$ .

3. Raisonnez par double implication et par double inclusion.

### II Applications

#### Exercice 11 : (★)

1. Montrer que  $\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_C$ .

*Solution : B = C.*

2. Montrer que  $\mathbb{1}_B \leq \mathbb{1}_C$ , en faisant attention à ne pas simplifier par des quantités pouvant être nulles.

*Solution : B ⊂ C.*

#### Exercice 12 : (★)

Raisonnez par équivalences et utiliser la définition de l'image réciproque.

#### Exercice 13 : (★)

Rechercher des contre-exemples.

#### Exercice 14 : (★)

Raisonnez par double inclusion.

Soit  $y \in f(f^{-1}(Y))$ , alors il existe  $x \in f^{-1}(Y)$  tel que  $y = f(x)$ . En déduire, en utilisant deux arguments différents que  $y \in Y$  et que  $y \in f(E)$ .

Soit  $y \in Y \cap f(E)$ . Comme  $y \in f(E)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . En utilisant  $y \in Y$ , montrer que  $x \in f^{-1}(Y)$  et conclure.

**Exercice 15 : (★)**

L'implication directe est évidente. Pour la réciproque : utiliser les définitions pour montrer que  $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$  et pour l'inclusion réciproque, appliquer l'hypothèse à  $Y = \{y\}$ .

**Exercice 16 : (★★)**

1. Utiliser la définition de l'image.
2. Raisonnez par double inclusion et utiliser la définition de l'image.
3. Trouver un contre-exemple. (On peut utiliser la fonction carré.)
4. Trouver un contre-exemple. (On peut utiliser la fonction carré.)

**Exercice 17 : (★)**

Pour avoir l'intuition des résultats, utiliser le graphe de  $f$ .

Pour prouver les résultats, raisonnez par double inclusion ou par équivalences.

*Solution :*  $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}, f([-1, 4]) = [0, 16], f^{-1}([-1, 4]) = [-2, 2], f(f^{-1}([-1, 4])) = [0, 4], f^{-1}(f([-1, 4])) = [-4, 4]$ .

### III Injection, surjection, bijection

**Exercice 18 : (★)**

Chercher des contre-exemples.

*Solution :*  $f$  n'est ni injective, ni surjective.

**Exercice 19 : (★)**

Résoudre l'équation  $f(x, y, z) = (X, Y, Z)$ .

*Solution :*  $f^{-1}(x, y, z) = (z, x, y)$ .

**Exercice 20 : (★)**

Supposer qu'il existe une telle application. Chercher une contradiction en utilisant un antécédent  $x$  d'un nombre strictement négatif puis un antécédent de  $x$ .

**Exercice 21 : (★★)**

1. *Solution :*  $f$  est injective et non surjective,  $g$  est surjective et non injective.

2. *Solution :*  $f \circ g : x \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$  et  $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ . On en conclut que  $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$  ne suffit pas à prouver la bijectivité.

**Exercice 22 : (★★)**

Montrer que  $f(1, 0) = f(1, 1)$  et en déduire que  $f$  n'est pas injective.

Pour montrer la surjectivité, on utilise la définition.

Soit  $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$  (ici,  $(X, Y)$  est vu comme un élément de l'ensemble d'arrivée).

Posons  $x = X$  (on cherche  $x$  et  $y$  tels que  $f(x, y) = (X, Y)$  c'est-à-dire  $x = X$  et  $xy - y^3 = Y$ ).

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto xy - y^3$ . Montrer que  $\lim_{-\infty} g = +\infty$ ,  $\lim_{+\infty} g = -\infty$ , que  $g$  est continue et

utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que  $g$  est surjective.

Ainsi, il existe  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $g(y) = Y$ .

Conclure en vérifiant que  $f(x, y) = (X, Y)$ .

*Solution :*  $f$  n'est pas injective et  $f$  est surjective.

**Exercice 23 : (★★)**

1. Soient  $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ ,  $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

On a :

$$f(z) = Z \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z = i \frac{1+Z}{Z-1}.$$

En déduire que  $f$  est bijective et la valeur de  $f^{-1}$ .

2. • Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+i}{x-i}$ . En utilisant le module du conjugué, montrer que  $|f(x)| = 1$ . Ainsi :  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{U} \setminus \{1\}$ .
  - Soit  $Z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ , alors, posons  $z = f^{-1}(Z) = i \frac{1+Z}{Z-1}$ . Alors  $Z = f(z)$  et  $z = i \frac{(1+Z)(\bar{Z}-1)}{|Z-1|^2}$ . En utilisant que  $Z\bar{Z} = |Z|^2 = 1$ , montrer que  $z \in \mathbb{R}$ . Ainsi :  $\mathbb{U} \setminus \{1\} \subset f(\mathbb{R})$ .
  - Soit  $z \in \mathbb{U} \setminus \{i\}$ . Alors  $f(z) = \frac{z+i}{z-i} = \frac{(z+i)(\bar{z}+i)}{|z-i|^2}$ . En utilisant que  $z\bar{z} = |z|^2 = 1$ , montrer que  $f(z) \in i\mathbb{R}$ . Ainsi  $f(\mathbb{U} \setminus \{i\}) \subset i\mathbb{R}$ .
  - Soit  $y \in \mathbb{R}$ , alors, posons  $z = f^{-1}(iy) = i \frac{1+iy}{iy-1}$ . Alors  $iy = f(z)$  et montrer que  $|z| = 1$ . Ainsi  $i\mathbb{R} \subset f(\mathbb{U} \setminus \{i\})$ .
  - Soit  $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Alors  $f(iy) = \frac{iy+i}{iy-i}$ . Simplifier cette expression pour montrer que  $f(iy) \in \mathbb{R}$ . Donc  $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
  - Soit  $X \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , alors, posons  $z = f^{-1}(X) = i \frac{1+X}{X-1}$ . En déduire que  $\mathbb{R} \setminus \{1\} \subset f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$ .

*Solution :*  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{1\}$ ,  $f(\mathbb{U} \setminus \{i\}) = i\mathbb{R}$ ,  $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**Exercice 24 : (★)**

- Utiliser les définitions.

- Soit  $y \in F$ . Appliquer la définition de la surjectivité de  $g \circ f$  à  $g(y) \in G$ .

**Exercice 25 : (★★)** Raisonnez par double implication en utilisant les définitions.**Exercice 26 : (★★★)**

1. Pour montrer que  $A \cup B = E$  implique  $f$  injective, utiliser la définition de l'injectivité. Pour montrer que  $f$  injective implique  $A \cup B = E$ , calculer  $f(A \cup B)$  et  $f(E)$ .

2. Pour montrer que  $f$  surjective implique  $A \cap B = \emptyset$ , utiliser l'existence d'un antécédent de  $(\emptyset, B)$ .

Pour montrer que  $A \cap B = \emptyset$  implique  $f$  surjective, montrer que pour  $(C, D) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ ,  $f(C \cup D) = (C, D)$ .

3. Utiliser les résultats précédents.

$$\text{Solution : } f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (C, D) & \mapsto & C \cup D \end{array} .$$