

I Ensembles

Exercice 1 : (★★)

- Il suffit de prouver l'inclusion $\mathbb{R} \subset \{x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, x < \varepsilon\}$, l'autre inclusion étant évidente.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on veut montrer que : $\exists \varepsilon > 0, x < \varepsilon$. Posons $\varepsilon = \dots$, (on pourra utiliser une valeur absolue), on montre que $\varepsilon > 0$ et que $x < \varepsilon$.
- On raisonne par double inclusion.
Pour montrer que $\{0\} \subset \{x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon\}$, il suffit de montrer que $x = 0$ vérifie $\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$.
Pour montrer que $\{x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon\} \subset \{0\}$, on va raisonner par l'absurde.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$. Supposons que $x \neq 0$. Posons $\varepsilon = \dots > 0$, montrer que $|x| \geq \varepsilon$ ce qui est absurde.

Exercice 2 :

- f_1 et f_2 sont paires.
Solution : A est un sous-ensemble de E.
- g_2 n'est pas paire.
Solution : B n'est pas un sous-ensemble de E.
- Soit $f \in C$. Prendre $x = y = 0$ pour montrer que $f(0) = 0$ puis $y = 0$ pour montrer que f est paire.
Solution : C est un sous-ensemble de E.

Exercice 3 :

Raisonner par double inclusion pour montrer que $A = B$.

Exercice 4 :

Utiliser les inclusions entre un ensemble et une réunion (resp. une intersection) d'ensembles.

Exercice 5 : (★)

Prouver une implication en raisonnant par double inclusion.

Exercice 6 : (★)

Considérer un élément $x \in C$ et traiter les deux cas : $x \in A$ et $x \in B$.

Exercice 7 : (★★)

Raisonner par analyse-synthèse.

Solution : Si $B \not\subset A$, l'équation n'a pas de solution, sinon les solutions sont les X tels que $B \subset X \subset B \cup \bar{A}$.

Exercice 8 : (★)

Traduire "privé" en terme de complémentaire.

Trouver un contre-exemple pour prouver que l'inclusion réciproque est fausse.

Exercice 9 : (★★)

Raisonner par chaîne d'implications.

Exercice 10 : (★)

- Utiliser la distributivité de la réunion et de l'intersection.
- Calculer $\overline{A \cap B}$.
- Raisonner par double implication et par double inclusion.

II Applications

Exercice 11 : (★)

- Montrer que $\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_C$.
Solution : $B = C$.
- Montrer que $\mathbb{1}_B \leq \mathbb{1}_C$, en faisant attention à ne pas simplifier par des quantités pouvant être nulles.
Solution : $B \subset C$.

Exercice 12 : (★)

Raisonner par équivalences et utiliser la définition de l'image réciproque.

Exercice 13 : (★)

Rechercher des contre-exemples.

Exercice 14 : (★)

Raisonner par double inclusion.

Soit $y \in f(f^{-1}(Y))$, alors il existe $x \in f^{-1}(Y)$ tel que $y = f(x)$. En déduire, en utilisant deux arguments différents que $y \in Y$ et que $y \in f(E)$.

Soit $y \in Y \cap f(E)$. Comme $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. En utilisant $y \in Y$, montrer que $x \in f^{-1}(Y)$ et conclure.

Exercice 15 : (★)

L'implication directe est évidente. Pour la réciproque : utiliser les définitions pour montrer que $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$ et pour l'inclusion réciproque, appliquer l'hypothèse à $Y = \{y\}$.

Exercice 16 : (★★)

1. Utiliser la définition de l'image.
2. Raisonner par double inclusion et utiliser la définition de l'image.
3. Trouver un contre-exemple. (On peut utiliser la fonction carré.)
4. Trouver un contre-exemple. (On peut utiliser la fonction carré.)

Exercice 17 : (★)

Pour avoir l'intuition des résultats, utiliser le graphe de f .

Pour prouver les résultats, raisonner par double inclusion ou par équivalences.

Solution : $f^{-1}(\{I\}) = \{-1, I\}, f([-1, 4]) = [0, 16], f^{-1}([-1, 4]) = [-2, 2], f(f^{-1}([-1, 4])) = [0, 4], f^{-1}(f([-1, 4])) = [-4, 4]$.

III Injection, surjection, bijection**Exercice 18 : (★)**

Chercher des contre-exemples.

Solution : f n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 19 : (★)

Résoudre l'équation $f(x, y, z) = (X, Y, Z)$.

Solution : $f^{-1}(x, y, z) = (z, x, y)$.

Exercice 20 : (★)

Supposer qu'il existe une telle application. Chercher une contradiction en utilisant un antécédent x d'un nombre strictement négatif puis un antécédent de x .

Exercice 21 : (★★)

1. *Solution* : f est injective et non surjective, g est surjective et non injective.
2. *Solution* : $f \circ g : x \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$ et $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$. On en conclut que $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ ne suffit pas à prouver la bijectivité.

Exercice 22 : (★★)

Montrer que $f(1, 0) = f(1, 1)$ et en déduire que f n'est pas injective.

Pour montrer la surjectivité, on utilise la définition.

Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ (ici, (X, Y) est vu comme un élément de l'ensemble d'arrivée).

Posons $x = X$ (on cherche x et y tels que $f(x, y) = (X, Y)$ c'est-à-dire $x = X$ et $xy - y^3 = Y$).

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto xy - y^3$. Montrer que $\lim_{-\infty} g = +\infty, \lim_{+\infty} g = -\infty$, que g est continue et

utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que g est surjective.

Ainsi, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $g(y) = Y$.

Conclure en vérifiant que $f(x, y) = (X, Y)$.

Solution : f n'est pas injective et f est surjective.

Exercice 23 : (★★)

1. Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}, Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

On a :

$$f(z) = Z \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z = i \frac{1+Z}{Z-1}.$$

En déduire que f est bijective et la valeur de f^{-1} .

2. • Soit $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+i}{x-i}$. En utilisant le module du conjugué, montrer que $|f(x)| = 1$. Ainsi : $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{U} \setminus \{1\}$.
• Soit $Z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, alors, posons $z = f^{-1}(Z) = i \frac{1+Z}{Z-1}$. Alors $Z = f(z)$ et $z = i \frac{(1+Z)(\bar{Z}-1)}{|Z-1|^2}$. En utilisant que $Z\bar{Z} = |Z|^2 = 1$, montrer que $z \in \mathbb{R}$. Ainsi : $\mathbb{U} \setminus \{1\} \subset f(\mathbb{R})$.
• Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{i\}$. Alors $f(z) = \frac{z+i}{z-i} = \frac{(z+i)(\bar{z}+i)}{|z-i|^2}$. En utilisant que $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, montrer que $f(z) \in i\mathbb{R}$. Ainsi $f(\mathbb{U} \setminus \{i\}) \subset i\mathbb{R}$.
• Soit $y \in \mathbb{R}$, alors, posons $z = f^{-1}(iy) = i \frac{1+iy}{iy-1}$. Alors $iy = f(z)$ et montrer que $|z| = 1$. Ainsi $i\mathbb{R} \subset f(\mathbb{U} \setminus \{i\})$.
• Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors $f(iy) = \frac{iy+i}{iy-i}$. Simplifier cette expression pour montrer que $f(iy) \in \mathbb{R}$. Donc $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
• Soit $X \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors, posons $z = f^{-1}(X) = i \frac{1+X}{X-1}$. En déduire que $\mathbb{R} \setminus \{1\} \subset f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.

Solution : $f(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{1\}, f(\mathbb{U} \setminus \{i\}) = i\mathbb{R}, f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 24 : (★)

- Utiliser les définitions.
- Soit $y \in F$. Appliquer la définition de la surjectivité de $g \circ f$ à $g(y) \in G$.

Exercice 25 : (★★) Raisonner par double implication en utilisant les définitions.

Exercice 26 : (★★★)

1. Pour montrer que $A \cup B = E$ implique f injective, utiliser la définition de l'injectivité. Pour montrer que f injective implique $A \cup B = E$, calculer $f(A \cup B)$ et $f(E)$.

2. Pour montrer que f surjective implique $A \cap B = \emptyset$, utiliser l'existence d'un antécédent de (\emptyset, B) .

Pour montrer que $A \cap B = \emptyset$ implique f surjective, montrer que pour $(C, D) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, $f(C \cup D) = (C, D)$.

3. Utiliser les résultats précédents.

$$\text{Solution : } f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (C, D) & \mapsto & C \cup D \end{array} .$$