

# Indications du chapitre 12 :

## Calcul matriciel et systèmes linéaires

### I Ensemble de matrices

**Exercice 1 :**  Calculer le produit matriciel  $M(x).M(y)$ .

**Exercice 2 :**  Simplifier  $(S - P)(S + P)$ , multiplier ensuite à gauche par  $P$  puis recommencer en multipliant à droite par  $P$ .

**Exercice 3 :**  Chercher  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et raisonner avec des coefficients indéterminés.

*Solution :*  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

**Exercice 4 :** 

Calculer  $A^2$ .

*Solution :*  $a = 2t + 1$ ,  $b = -t^2 - t + 2$ .

**Exercice 5 :** (★★)

- Utiliser les symboles de Kronecker.

*Solution :*  $a_{i,r} b_{s,j}$

- Raisonner par l'absurde et appliquer l'hypothèse à  $X = E_{r,s}$  avec  $(r,s)$  bien choisi.

**Exercice 6 :** (★★) 

Analyse : Supposons qu'il existe  $M$  telle que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $AM = MA$ , alors pour tout  $r, s \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $ME_{rs} = E_{rs}M$ . Soient  $i, j \llbracket 1, n \rrbracket$ , après calcul on a :  $(ME_{rs})_{ij} = m_{i,r}\delta_{s,j}$  et  $(E_{rs}M)_{i,j} = m_{s,j}\delta_{r,i}$  donc  $m_{i,r}\delta_{s,j} = m_{s,j}\delta_{r,i}$ .

Ces relations sont vraies pour tout  $r, s, i, j \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

- pour  $i \neq r$  et  $s = j$ , on a  $m_{i,r} = 0$  donc  $M$  est diagonale,
- pour  $i = r$  et  $s = j$ , on a  $m_{i,i} = m_{j,j}$  donc  $M = \lambda I_n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Synthèse : ...

*Solution :*  $\{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}$

**Exercice 7 :** (★★)

- Utiliser la linéarité de la somme.
- Utiliser une interversion de sommes.

- Utiliser la définition de la trace pour se ramener à une somme de carrés.
- Appliquer 3 à  $(A - B)^T$ .
- Raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe des matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $AB - BA = I_n$ . En appliquant la trace, montrer que  $0 = \text{tr}(I_n) = n$ .

### II Ensemble des matrices carrées

**Exercice 8 :** 

Raisonner par récurrence.

**Exercice 9 :** (★★)

Remarquer que  $A^n$  est de la forme :  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ . Le prouver par récurrence en utilisant  $A^{n+1} = A^n \cdot A$  et en déduire une relation de récurrence sur  $(u_n)$  prouvant qu'il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.

Calculer  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . *Solution :*  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^n - 1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

**Exercice 10 :** (★★)

- Calculer  $M^2$ .

*Solution :*  $M^2 = (\alpha + \beta)M + (1 - \alpha - \beta)I_2$ .

- Montrer, par récurrence, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M^n = a_nM + b_nI_2$  avec  $a_{n+1} = a_n(\alpha + \beta) + b_n$  et  $b_{n+1} = a_n(1 - \alpha - \beta)$ .

Montrer que  $(a_n)$  vérifie une relation de récurrence double et la résoudre.

*Solution :*  $M^n = \frac{1}{2-\alpha-\beta}((1 - (\alpha + \beta - 1)^n)M + (1 - \alpha - \beta + (\alpha + \beta - 1)^n)I_2)$ .

**Exercice 11 :** 

Appliquer la formule du binôme de Newton pour calculer la puissance  $n$ , et ne conserver que trois termes.

*Solution :*  $A^3 = 0$  et  $(I_3 + A)^n = I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2$

**Exercice 12 :** 

1. Poser  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et exprimer  $A$  en fonction de  $I_2$  et  $N$ .

$$\text{Solution : } \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

2. Remarquer que  $A = I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et appliquer la formule du binôme de Newton. Solution :  $\begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

### Exercice 13 :

Ecrire  $A = I + N$  et calculer  $N^3$  puis appliquer la formule du binôme de Newton.

$$\text{Solution : } A^p = \begin{pmatrix} 1 & 2p & 2p(p+2) \\ 0 & 1 & 2p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Exercice 14 :

Ecrire  $A = I + N$  et calculer  $N^3$  puis appliquer la formule du binôme de Newton.

$$\text{Solution : } A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} & n3^{n-1} + 5n(n-1)3^{n-2} \\ 0 & 3^n & 5n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

### Exercice 15 : (★)

Poser  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$  et montrer que le système se ramène à  $X_{n+1} = AX_n$  en choisissant bien la matrice  $A$ . Exprimer alors  $X_n$  en fonction de  $X_0$  et de  $A^n$ .

Exprimer  $A$  en fonction de  $I_2$  et une matrice de carré nul puis utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer  $A^n$ .

$$\text{Solution : } u_n = (4n+1)u_0 - 4nv_0 \text{ et } v_n = 4nu_0 + (1-4n)v_0$$

### Exercice 16 : (★★)

Poser  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$  et montrer que le système se ramène à  $X_{n+1} = AX_n$  en choisissant bien la matrice  $A$ . Exprimer alors  $X_n$  en fonction de  $X_0$  et de  $A^n$ .

Exprimer  $A$  en fonction de  $I_3$  et  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $U^k = 3^{k-1}U$  si  $k \geq 1$  puis utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer  $A^n$ .

$$\text{Solution : } \lim x_n = \lim y_n = \lim z_n = \frac{1}{3}(x_0 + y_0 + z_0)$$

### Exercice 17 : (★★)

Poser  $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et exprimer  $M_{a,b}$  en fonction de  $I_n$  et  $U$ . Utiliser la for-

mule du binôme de Newton et calculer les puissances de  $U$ .

$$\text{Solution : } \frac{1}{n}((a-b+bn)^k - (a-b)^k)U + (a-b)^kI_n$$

### Exercice 18 :

Solution : le produit de deux matrices symétriques  $A, B$  est symétriquessi  $AB = BA$ , le produit de deux matrices antisymétriques  $A, B$  est antisymétriquessi  $AB = -BA$ .

### Exercice 19 : (★★)

Raisonner par analyse-synthèse. La matrice symétrique est  $\frac{1}{2}(M + M^T)$  et la matrice antisymétrique est  $\frac{1}{2}(M - M^T)$ .

## III Opérations élémentaires

**Exercice 20 :** (★★) Utiliser l'algorithme du pivot de Gauss puis simplifier la matrice échelonnée réduite par ligne en effectuant des opérations sur les colonnes.

## IV Systèmes linéaires

### Exercice 21 :

1. Solution :  $\left\{(1 + \frac{5}{6}t, \frac{1}{2}t, -1 + \frac{7}{3}t, t), t \in \mathbb{R}\right\}$
2. Solution :  $\emptyset$

### Exercice 22 :

- Solution :
1.  $\{(-1 + 7z, 4 - 11z, z), z \in \mathbb{R}\}$  si  $a = 2$ ,  $\emptyset$  sinon,
  2.  $\left\{(-\frac{1}{9} + 5z, \frac{4}{9} - 2z, z, \frac{2}{9}), z \in \mathbb{R}\right\}$ , si  $a = \frac{4}{9}$ ,  $\emptyset$  sinon.

### Exercice 23 : (★)

1. Solution :  $\{(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}z - \frac{6}{5}t, \frac{3}{5} + \frac{3}{5}z - \frac{7}{5}t, z, t), z, t \in \mathbb{R}\}$  si  $m = 5$   
 $\emptyset$  sinon
2. Solution :  $\left\{\left(\frac{m}{(1-m)(2+m)} - \frac{1}{2+m}t, \frac{2-m^2}{(1-m)(2+m)} - \frac{1}{2+m}t, \frac{-m(1+m)}{(1-m)(2+m)} - \frac{1}{2+m}t\right), t \in \mathbb{R}\right\}$  si  $m \notin \{1, -2\}$ ,  
 $\{(-\frac{2}{3} + z, \frac{1}{3} + z, z, -\frac{2}{3}), z \in \mathbb{R}\}$  si  $m = -2$ ,  
 $\emptyset$  si  $m = 1$

## V Matrices inversibles



### Exercice 24 :

Remarquer que  $A(A^{n-1} + A^{n-2}) = (A^{n-1} + A^{n-2})A = I_n$ .

*Solution :*  $A^{-1} = A^{n-1} + A^{n-2}$



### Exercice 25 :

$(A + I_3)^3 = 0$  donne  $A^3 + 3A^2 + 3A + I_3 = 0$ .

*Solution :*  $(A + I_3)^3 = 0$  et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$



### Exercice 26 :

1. *Solution :*  $A^3 - 4A^2 + 5A = 2I_3$

2. Se ramener à une expression de la forme  $AB = I_3$ .

*Solution :*  $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3)$

### Exercice 27 : (★★)

Montrer que  $AB = I_n$  en remarquant que  $A$  et  $B$  sont triangulaires.

### Exercice 28 : (★★)

Se ramener à  $PA^T = AP$  et raisonner par coefficients indéterminés sur  $A$  et  $P$ .

### Exercice 29 : (★★)

Raisonner par récurrence double et montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $u_{k+2} = u_{k+1} - u_k$ .

*Solution :*  $u_k = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ .

### Exercice 30 : (★★)

1. Raisonner comme dans l'exercice 6 en remarquant que  $I_n + E_{r,s}$  est inversible.

2. Remarquer que, si  $B$  est inversible,  $A = (AB^{-1})B$ .



### Exercice 31 :

*Solution :*  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 32 : (★)

1. Appliquer une des méthodes de calcul de l'inverse.

*Solution :*  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.  $D$  est une matrice diagonale, ses puissances  $n$  le sont également.

*Solution :*  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

3. On a  $A = PDP^{-1}$  et  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

*Solution :* Si  $n$  est impair,  $A^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

et si  $n$  est pair  $A^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

### Exercice 33 : (★)

1. Appliquer une des méthodes de calcul de l'inverse.

*Solution :*  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. La matrice  $D$  est diagonale.

*Solution :*  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

3. On a  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

*Solution :*  $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n - (-1)^n & (-1)^n - 3^n \\ 1 - 3^n & 2 - 3^n & 3^n - 1 \\ 1 - 3^n & 2 - 3^n - (-1)^n & (-1)^n - 1 + 3^n \end{pmatrix}$

### Exercice 34 : (★★)

1. Appliquer une des méthodes de calcul de l'inverse.

*Solution :*  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. *Solution :*  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. On peut appliquer la formule du binôme de Newton et calculer  $T^2$  et  $T^3$  pour avoir l'intuition de la formule à montrer par récurrence.

*Solution :*  $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. On a  $A^n = PT^nP^{-1}$ .

*Solution :*  $A^n = \begin{pmatrix} n+1 & n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}$