Indications du chapitre 13 : Limites et continuité

I Limite d'une fonction en un point

Exercice 1 :
Etudier les limites suivantes :
1. Factoriser par le terme dominant.
Solution : $+\infty$
2. Utiliser la quantité conjuguée.
Solution : $\frac{3}{8}$
3. Factoriser par $x-a$.
Solution : $-\infty$ *si* $a=0$, $\frac{a-1}{3a^2}$ *si* $a \neq 0$.
4. Utiliser une limite usuelle.
Solution : 0
5. Factoriser par le terme dominant.
Solution : $+\infty$

Exercice 2 :
1. Factoriser par le terme dominant.
Solution : $\frac{1}{5}$
2. Utiliser la quantité conjuguée.
Solution : 1
3. Utiliser la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$.
Solution : 5
4. Factoriser par le terme dominant.
Solution : $+\infty$
5. Transformer la puissance en exponentielles.
Solution : e^2

Exercice 3 :
1. *Solution :* $+\infty$
2. Utiliser la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$.
Solution : $-\frac{2}{3}$
3. Utiliser les limites en 0 de $\frac{\sin x}{x}$ et de $\frac{1-\cos x}{x^2}$.
Solution : $\frac{1}{2}$
4. Etudier les limites en 0^+ et en 0^-.
Solution : La limite n'existe pas.
5. Factoriser et utiliser un taux d'accroissement.
Solution : $\frac{\sin a \cos a}{a}$

Exercice 4 : ($\star$)
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a $\lim_{n\to+\infty}(x_0+nT)=+\infty$ donc, $\lim_{n\to+\infty} f(x_0+nT)=a$. En déduire que $f(x_0)=a$.

Exercice 5 : ($\star\star$)
Appliquer la caractérisation séquentielle de la limite à la suite : $x_n=\frac{1}{2n}$ pour montrer que f n'a pas de limite finie en 0 puis à la suite $y_n=\frac{1}{2n+1}$ pour montrer que f n'a pas de limite en 0. *Solution : f n'admet pas de limite en* 0.

Exercice 6 :
1. Calculer les limites à gauche et à droite en utilisant le théorème d'encadrement.
Solution : 1
2. Remarquer que, au voisinage de 2, f est nulle.
Solution : 0
3. Calculer les limites à gauche et à droite.
Solution : f n'a pas de limite en $\frac{1}{2}$.
4. Remarquer que, au voisinage de $\dfrac{2}{3}$, $f(x)=x$.
Solution : $\dfrac{2}{3}$
5. Remarquer que, au voisinage de $+\infty$, f est nulle.
Solution : 0

Exercice 7 :
Utiliser des encadrements.
Solution : 0

Exercice 8 : ($\star$)
1. Remarquer que cos est bornée.
Solution : $\lim_a f = 0$
2. Trouver deux suites tendant vers 0 telles que l'image par f de ces suites n'ait pas la même limite.
Solution : f n'a pas de limite en a.

3. Raisonner par minoration.
   Solution : $\lim_a f = +\infty$
4. Calculer les limites en a^+ et a^-.
   Solution : f n'a pas de limite en a.

II Continuité en un point

Exercice 9 :

1. f est clairement continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Etudier les limites à gauche et à droite des entiers relatifs.
   Solution : f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. f est clairement continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Etudier les limites à gauche et à droite des entiers relatifs.
   Solution : f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. f est clairement continue sur $\mathbb{R}*$. Etudier la limite en 0.
   Solution : f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. f est clairement continue sur $\mathbb{R}*$. Pour étudier la limite en 0, remarquer que $\frac{e^{arctan x}-1}{x} = \frac{e^{arctan x}-1}{\text{Arctan}\, x} \cdot \frac{\text{Arctan}\, x}{x}$ et utiliser des taux d'accroissement.
   Solution : f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 :

Etudier la continuité des applications définies par :

1. f est clairement continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Etudier les limites à gauche et à droite des entiers relatifs.
   Solution : f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Utiliser l'exponentielle et le logarithme.
   Solution : f est prolongeable par continuité en 0 avec $f(0) = e$.

Exercice 11 : ($\star$)

1. Etudier la limite en 0^+ et en 0^-.
   Solution : f est prolongeable par continuité en 0 avec $f(0) = 1$.
2. Etudier la limite en 0^+ et en 0^-.
   Solution : f n'est pas prolongeable par continuité en 0.
3. Etudier la limite en 0^+ et en 0^-.
   Solution : f n'est pas prolongeable par continuité en 0.
4. Calculer la limite en 0 en utilisant l'exponentielle et le logarithme.
   Solution : f est prolongeable par continuité en 0 avec $f(0) = e$.
5. Utiliser le fait que cos n'a pas de limite en $+\infty$
   Solution : f n'est pas prolongeable par continuité en 0.
6. Remarquer que cos est borné.
   Solution : f est prolongeable par continuité en 0 avec $f(0) = 0$.

Exercice 12 : ($\star$)

Raisonner par analyse-synthèse et montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{3^n}\right)$.
Solution : Les applications constantes.

Exercice 13 : ($\star$)

Etudier la continuité en $x_0 \in \mathbb{R}$ en traitant les cas :

- $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ en utilisant une suite explicite d'irrationnels,
- $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en utilisant une suite implicite de rationnels,
- $x_0 = 0$ en utilisant une inégalité.

Solution : f est uniquement continue en 0.

Exercice 14 : ($\star\star$)

1. Utiliser que tout réel est limite d'une suite de rationnels.
2. (a) Utiliser que tout réel est limite d'une suite de rationnels.
   (b) Trouver un contre-exemple. On peut prendre : $f(x) = |x-\sqrt{2}|$ et $g(x) = 2|x-\sqrt{2}|$.

III Continuité sur un intervalle

Exercice 15 :

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $x \mapsto x^{17} - x^{11} - 1$.

Exercice 16 : ($\star$)

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $x \mapsto f(x) - \lambda g(x)$.

Exercice 17 : ($\star$)

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $x \mapsto f(x) - g(x)$.

Exercice 18 : ($\star$)

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $x \mapsto f(a) - 2f(x) + f(b)$.

Exercice 19 : ($\star$)

Raisonner par analyse-synthèse et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ ou 1. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour conclure.
Solution : $f = 0$ ou $f = 1$

Exercice 20 : ($\star$)

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $g : x \mapsto f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$.

Exercice 21 : ($\star\star$)

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $g : x \mapsto f(x) - x$.

Exercice 22 : (⋆⋆)

Posons $\begin{array}{rccl} g: & [0,1-\frac{1}{n}] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x) \end{array}$. Supposons que g ne s'annule pas. En déduire, avec le théorème des valeurs intermédiaires, que g est de signe constant.

Supposons, par exemple, $g>0$. Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$, on a $g\left(\frac{k}{n}\right)>0$. Donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)>0$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)=f(1)-f(0)$ puis en déduire une contradiction.

Exercice 23 : (⋆⋆)

Raisonner par l'absurde pour se ramener au cas $g-f>0$.
Montrer que f admet un point fixe x puis, en posant $u_0=x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=g(u_n)$, montrer que, pour tout n, u_n est un point fixe de f.
Montrer que (u_n) converge et faire un passage à la limite.

Exercice 24 : (⋆⋆)

Supposer f non monotone. En choisissant bien a,b,x,y, utiliser la fonction $[0,1]\to\mathbb{R}$, $t\mapsto f((1-t)b+ty)-f((1-t)a+tx)$.

Exercice 25 : (⋆)

1. Utiliser le théorème des bornes atteintes.
2. Appliquer la relation à x_1 et remarquer que $\frac{x_1+1}{3}, \frac{x_1^2}{9}+1,2+\sin x_1 \in [1,3]$.
3. *Solution : f est constante égale à -2.*

Exercice 26 : (⋆)

Pour $f\circ g$ bornée, utiliser la définition d'une bornée.
Pour $g\circ f$ se ramener à l'étude de g sur un segment.

Exercice 27 : (⋆⋆)

Utiliser la définition de la limite afin de restreindre l'ensemble $\mathbb{R}^{+*}$ pour se ramener à un segment.

Exercice 28 : (⋆)

Remarquer que f est bornée au voisinage de $\pm\infty$ puis se ramener à l'étude sur un segment.

Exercice 29 : (⋆⋆)

Justfier et utiliser le fait que la borne supérieure sur $[a,b]$ est atteinte. Traiter les cas où elle est atteinte sur $]a,b[$ puis en a ou en b.

Exercice 30 : (⋆⋆)

1. Remarquer que $t\mapsto f(t)+xg(t)$ est continue sur un segment.
2. Pour la majoration, majorer $f(t)+(x+h)g(t)$ et pour la minoration, utiliser un point où $M(x+h)$ est atteint.
3. Appliquer la question précédente à un h bien choisi et faire un passage à la limite dans l'inégalité obtenue.

Exercice 31 : (⋆)

1. Montrer que f est strictement décroissante, continue et étudier ses limites en 0 et 1.
2. Justifier que f^{-1} est continue et que $\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(2^{-n})=f^{-1}(0)$.
   Solution : $\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(2^{-n})=\frac{1}{2}$.

Exercice 32 : (⋆)

1. *Solution :* $f(\frac{1}{x})=f(x)$
2. φ est continue, strictement décroissante donc est bijective de $]-1,1[$ vers $]\lim_1 \varphi, \lim_{-1}\varphi=\dots=\mathbb{R}$.
3. Faire deux cas : $]-1,1[$ et $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$.
   - Si $x\in]-1,1[$, alors $\varphi^{-1}\circ f(x)=\varphi^{-1}\circ\varphi(x)=x$.
   - Si $x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1]$, alors $\varphi^{-1}\circ f(x)=\varphi^{-1}\circ f(\frac{1}{x})$. Conclure en remarquant que $\frac{1}{x}\in]-1,1[$.

   Solution :
   $$\begin{array}{rccl} \varphi^{-1}\circ f: & \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} & \to &]-1,1[\\ & x & \mapsto & \begin{cases} x \text{ si } |x|<1 \\ \frac{1}{x} \text{ si } |x|>1 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 33 : (⋆⋆)

Montrer que f est injective puis surjective.
Utiliser que tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.