

I Nombre dérivé, fonction dérivée

Exercice 1 : 

Remarquer que $\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h} = h \frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2} + \frac{f(a)-f(a+h)}{h}$.
Solution : $-f'(a)$

Exercice 2 : 

Remarquer que $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = \frac{f(b_n)-f(0)}{b_n-0} + \frac{a_n}{b_n-a_n} \left(\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n-0} - \frac{f(0)-f(a_n)}{0-a_n} \right)$.

Exercice 3 : 

1. Encadrer le taux d'accroissement en 0.
2. *Solution :* $\lim f'(u_n) = -\infty$ et $\lim f'(v_n) = +\infty$.
3. Remarquer que $\lim u_n = \lim v_n = 0$.

Exercice 4 : 

1. Simplifier le taux d'accroissement en 0^+ et 0^- et reconnaître le taux d'accroissement de Arcsin en 0.

Solution : f_1 n'est pas dérivable en 0

2. Simplifier le taux d'accroissement en 0.

Solution : f_2 est dérivable en 0 et $f'_2(0) = 0$

3. Simplifier le taux d'accroissement en 0 et reconnaître une croissance comparée.

Solution : f_3 est dérivable en 0 et $f'_3(0) = 0$

Exercice 5 : 

1. Simplifier le taux d'accroissement en 0.

Solution : si $n > 2$, f_1 est dérivable en 0 et $f'_1(0) = 0$, si $n = 2$, f_1 est dérivable en 0 et $f'_1(0) = 1$, sinon f_1 n'est pas dérivable en 0.

2. *Solution :* f_2 n'est pas dérivable en 0

3. *Solution :* f_3 est dérivable en 0 et $f'_3(0) = 0$

Exercice 6 : 

1. Montrer que f est continue, strictement croissante et étudier ses limites en $\frac{\pi}{2}$ et en π .

Solution : f réalise une bijection vers $[1, +\infty[$.

2. Montrer que f est dérivable et que f' ne s'annule pas.

Solution : $\forall x \in]1, +\infty[, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

II Propriétés des fonctions dérivables

Exercice 7 : 

Pour $n \in \mathbb{Z}$, remarquer que $f(nT) = f((n+1)T)$ et appliquer le théorème de Rolle.

Exercice 8 : 

Appliquer le théorème de Rolle à $f : x \mapsto ax^5 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$.

Exercice 9 : 

Appliquer deux fois le théorème de Rolle à $x \mapsto f(x) - x$ puis à f' .

Exercice 10 : 

Appliquer le théorème de Rolle à $g : x \mapsto e^{-x}f(x)$.

Exercice 11 : 

Appliquer le théorème de Rolle à $x \mapsto x^\lambda f(x)$.

Exercice 12 : 

Appliquer le théorème de Rolle à $x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$.

Exercice 13 : 

1. Le seul problème est la continuité en 0.
2. Montrer que $g(0) = g(1)$ et appliquer le théorème de Rolle à la fonction g .

Exercice 14 : 

Se ramener à la recherche d'un extremum sur un segment.

Exercice 15 : 

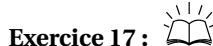
Raisonner par récurrence sur l et appliquer le théorème de Rolle.

Exercice 16 : 

1. On pose $h : x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$. Montrer que $h(a) = h(b)$ et appliquer le théorème de Rolle à h .

2. On applique le résultat de la question précédente à x_0 et à x voisin de x_0 : Il existe $c_x \in]x_0, x[$ ou $]x, x_0[$ tel que : $f'(c_x)(g(x) - g(x_0)) = g'(c_x)(f(x) - f(x_0))$. Donc : $f'(c_x)g(x) = g'(c_x)f(x)$. Montrer que $g(x) \neq 0$ en raisonnant par l'absurde et en appliquant le théorème de Rolle. Comme $\lim_{x \rightarrow x_0} c_x = x_0$, on a : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = l$. Conclure.

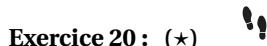
3. Solution : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$.



Exercice 17 : Utiliser l'inégalité des accroissements finis à $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $[k, k+1]$.

Exercice 18 : (*) Appliquer le théorème des accroissements finis entre 0 et x à la fonction : $t \mapsto f(t) - f(-t)$.

Exercice 19 : (*) Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction sh entre $\frac{1}{(x+1)^2}$ et $\frac{1}{x^2}$.



Comme : $\forall t \in [x, x+1], \frac{1}{x+1} \leq \ln'(t) \leq \frac{1}{x}$, on a, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction \ln entre x et $x+1$:

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

Donc $\frac{1}{x+1} \leq \ln \frac{x+1}{x}$, ainsi, $1 \leq (x+1) \ln \frac{x+1}{x}$, donc, par passage à l'exponentielle : $e \leq \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}$.

Raisonner de même pour l'autre membre de l'inégalité.

On effectue une preuve par récurrence pour le second point.

- Pour $n = 1, \dots$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que :

$$\frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} \quad (1)$$

En appliquant la première inégalité à $x = n+1$, on a :

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \leq e \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \quad (2)$$

Faire le produit de (1) et (2) pour conclure.



Exercice 21 :

1. Utiliser la fonction $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}] \rightarrow [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}], x \mapsto 2 + \frac{1}{2} \sin x$.

Solution : (u_n) converge vers l'unique $l \in [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ tel que $2 + \frac{1}{2} \sin l = l$.

2. Utiliser la fonction $[-1, 1] \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \cos x$.

Solution : (u_n) converge vers l'unique $l \in [-1, 1]$ tel que $\cos l = l$.

Exercice 22 : (*)

1. Faire une étude de fonctions.

2. Appliquer l'inégalité des accroissements finis à $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0, x]$ ou $[x, 0]$.

3. Effectuer le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$, remarquer que : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin t \leq t$ et faire une étude de fonctions.

4. Appliquer l'inégalité des accroissements finis à $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$ sur $[x, y]$.

Exercice 23 : Utiliser le théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 24 : (*)

Utiliser le théorème de la limite de la dérivée.

Solution : f n'est pas dérivable en 1.

Exercice 25 : (**)

Résoudre l'équation sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ puis utiliser le théorème de la limite de la dérivée.

Solution : Pas de solution sur \mathbb{R}

Exercice 26 : (**)

Résoudre l'équation sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ puis utiliser le théorème de la limite de la dérivée.

Solution : $\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \lambda_1 x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x \geq 0 \\ \lambda_2 x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

Exercice 27 : (**)

Résoudre l'équation sur \mathbb{R}^{+*} et sur \mathbb{R}^{-*} puis chercher les solutions deux fois dérивables sur \mathbb{R} .

Solution : $\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \lambda_1 \cos x + (\lambda_2 + 2) \sin x - x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x + x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

III Fonctions de classe \mathcal{C}^k

Exercice 28 : Utiliser le théorème de la limite de la dérivée.

Remarquer que $f(x) = \operatorname{Re}(e^{2(1+i)x})$.

Solution : $x \mapsto (2\sqrt{2})^n e^{2x} \cos(\frac{n\pi}{4} + 2x)$

Exercice 29 :

Appliquer la formule de Leibnitz.

Solution : $x \mapsto 2^n(x^2 + 1)e^{2x} + 2^n nxe^{2x} + n(n-1)2^{n-2}e^{2x}$

Exercice 30 : (★)

Appliquer la formule de Leibnitz à $x \mapsto 1-x$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, fonction dont on calcule les dérivées n -ièmes par récurrence.

Solution : $x \mapsto \frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$

Exercice 31 :

1. Prouver que $\cos^3 x = \frac{1}{4} \operatorname{Re}(e^{3ix} + 3e^{ix})$.

Solution : $f_1^{(n)}(x) = \frac{1}{4}(3^n \cos(3x + \frac{n\pi}{2}) + 3 \cos(x + \frac{n\pi}{2}))$

2. Utiliser $f_2(x) = \operatorname{Im}(e^{(1+i)x})$.

Solution : $f_2^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin(x + \frac{n\pi}{4})$

3. Utiliser la formule de Leibnitz.

Solution : $f_3^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x} (x^3 + (1-3n)x^2 + (3n^2 - 5n)x + 1 + n(n-1)(3-n))$

Exercice 32 : (★★)

Utiliser la formule de Leibnitz et étudier le coefficient dominant de l'expression trouvée pour en déduire la somme.

Solution : $f^{(n)}(x) = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 x^{n-k} (1+x)^k$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

Exercice 33 : (★★)

Avoir l'intuition de la formule puis la prouver par récurrence en remarquant que $f_{n+1}(x) = x \cdot f_n(x)$.

Solution : $f_n^{(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{1/x}$.

Exercice 34 : (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer par récurrence que : $\forall k \in [[0, n]], \forall x \in [0, 1], |f^{(n-k)}(x)| \leq x^{k+1}$. Pour cela, on pourra appliquer le théorème des accroissements finis.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1[, |f(x)| \leq x^{n+1}$ et faire tendre n vers $+\infty$.

IV Fonctions convexes

Exercice 35 :

Montrer que la fonction $x \mapsto -\ln(\ln x)$ est convexe.

Exercice 36 : (★)

1. Calculer f'' .

2. Utiliser la définition de la convexité entre les points x et $1-x$ avec un coefficient bien choisi.

Exercice 37 : (★)

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et utiliser la croissance du taux d'accroissement.

2. Solution : $x \mapsto e^{-x}$.

Exercice 38 : (★★)

Soient $x, y \in [0, \frac{1}{2}]$ tels que $x \leq y$. Montrer qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $y = \lambda x + (1-\lambda)(1-x)$ et appliquer la convexité aux points y et $1-y$.

Exercice 39 : (★★)

Raisonner par analyse-synthèse.

Solution : $x \mapsto ax + b, a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 40 : (★★★)

1. Raisonner par récurrence sur n .

2. Applications :

(a) Appliquer l'inégalité de Jensen à la fonction $-\ln$ avec les coefficients $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

(b) Montrer que la fonction $x \mapsto (x + \frac{1}{x})^2$ est convexe et appliquer l'inégalité de Jensen.