

I L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1 : (★)

Raisonnement par coefficients indéterminés et par équivalences.

Solution : $\{X^4 - 4X^3 + bX^2 + (8 - 2b)X + d, b, d \in \mathbb{C}\}$

Exercice 2 : (★)

Raisonnement par coefficients indéterminés et par équivalences.

Solution :

Exercice 3 : (★)

- Montrer que $\deg(P + Q) \leq n$ et calculer le coefficient de X^n et de X^{n-1} .
Solution : si n est pair, $\deg(P + Q) = n$, si n est impair, $\deg(P + Q) = n - 1$.
- Montrer que $\deg(P - Q) \leq n$ et calculer le coefficient de X^n et de X^{n-1} .
Solution : $\deg(P - Q) = n - 1$ si n impair, $n - 2$ si n pair et $n \neq 2$, $-\infty$ si $n = 2$.

Exercice 4 : (★)

Montrer que si P est solution alors P est de degré 2 puis raisonner par coefficients indéterminés.

Solution : $\{a(X^2 - 1), a \in \mathbb{K}\}$

II Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 5 :

Utiliser la formule du binôme de Newton.

Exercice 6 : (★★)

Remarquer que $P \circ P - X = (P \circ P - P) + (P - X)$ puis écrire P sous la forme $\sum_{k=0}^n a_k X^k$ et utiliser

la factorisation de $P^k - X^k$.

Poser $P = X^2 - 3X + 1$ et calculer $P \circ P - X$.

Solution : $\{2 \pm \sqrt{3}, 1 \pm \sqrt{2}\}$

Exercice 7 :

- Solution :* $Q = X + 8, R = 47X^2 - 13X - 26$
- Solution :* $Q = \frac{1+i}{2}X + \frac{-1+2i}{2}, R = \frac{-5-4i}{2}X + \frac{5-8i}{2}$

Exercice 8 :

- Solution :* $Q = 2X^2 + 3X + 11, R = 25X - 5$
- Solution :* $Q = X^2 + (1 - 2i)X - (2 + 3i), R = -(5 + i)$

Exercice 9 : (★)

Remarquer que R est de la forme $aX + b, a, b \in \mathbb{R}$ et évaluer en des valeurs intéressantes.

Solution : $R = 1$

Exercice 10 : (★)

- Calculer A^2 .
- La forme de la division euclidienne est $X^n = (X^2 - 7X + 10)Q + aX + b$. Comme $X^2 - 7X + 10 = (X - 2)(X - 5)$, évaluer en 2 et en 5 pour trouver les valeurs de a et b .
Solution : $R = \frac{1}{3}((5^n - 2^n)X + 5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n)$
- Remarquer que la forme de la division euclidienne reste vraie pour A . *Solution :* $A^n = \frac{1}{3}((5^n - 2^n)A + (5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n)I_3)$

Exercice 11 : (★★)

- On a $X^n = ((X^p - a) + a)^q X^r$. Donc, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} X^n &= \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (X^p - a)^k a^{q-k} X^r \\ &= (X^p - a) \sum_{k=1}^q \binom{q}{k} (X^p - a)^{k-1} a^{q-k} X^r + a^q X^r. \end{aligned}$$

Conclure.

- Raisonnement de même qu'à la question précédente, avec :

$$X^n - a^n = ((X^p - a^p) + a^p)^q X^r - a^n.$$

Solution : $R = a^{pq} X^r - a^n$

- Ecrire les restes de divisions euclidiennes de $X^{12}, 8X^{11}, 5(X^6 - 1), -3X^4$ et X^2 par $X^3 - 1$.

Solution : $R = 9X^2 - 3X + 1$

III Evaluation polynomiale et racines

Exercice 12 : (★)

1. Faire le calcul.
2. Remarquer que z est racine de P ssi $\sqrt{2} \frac{z+1}{z+2} \in \mathbb{U}_4$.
Solution : $\pm\sqrt{2}, \frac{-4 \pm i\sqrt{2}}{3}$.

Exercice 13 :

Remarquer que $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ et montrer que 1 et 2 sont racines de $(X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$.

Exercice 14 : (★)

Chercher a et b tels que i et $-i$ soient racines de $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 1$.
Solution : $(a, b) = (2, 1)$.

Exercice 15 : (★★)

Montrer que $(X-2)|(P-1)$. *Solution* : $((X-2)R + 1, -X + 5 - (X^2 - 5X + 7)R), R \in \mathbb{C}[X]$.

Exercice 16 : (★★)

1. Avoir l'intuition du résultat puis le prouver par récurrence.
Solution : T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} si $n \neq 0$, 1 si $n = 0$.
2. Montrer que T_n vérifie la relation, puis, pour l'unicité, se ramener à un polynôme admettant une infinité de racines.
3. En utilisant la relation précédente, trouver n racines de T_n . Justifier que ce sont les seules.
Solution : $\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

Exercice 17 :

Considérer un polynôme T -périodique et montrer que le polynôme $P(X) - P(0)$ admet une infinité de racines.

Solution : L'ensemble des polynômes constants.

Exercice 18 :

1. (s, p) sont solutions d'un système linéaire.
Solution : $s = 1, p = -2$
2. x et y sont racines du polynôme $X^2 - X - 2$.
Solution : $(x, y) = (2, -1)$ ou $(-1, 2)$

IV Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 19 :

Pour Q , utiliser le degré de la somme de deux polynômes de degrés distincts, pour R obtenir une inégalité en utilisant la somme de deux polynômes puis étudier les coefficients dominants de XP' et P .

Solution : $\deg(Q) = n + 1, \deg(R) = n$.

Exercice 20 : (★)

Déterminer le degré de P en raisonnant sur son coefficient dominant.

Solution : $P = X^2 - X + c, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 21 : (★★)

Déterminer le degré de P en raisonnant sur son coefficient dominant.

Solution : $P = aX, a \in \mathbb{R}$.

Exercice 22 : (★)

1. Calculer le degré et le coefficient dominant de $(X^2 - 1)^n$.
Solution : L_n est de degré n et de coefficient dominant $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$
2. Appliquer la formule de Leibnitz à $(X+1)^n$ et $(X-1)^n$.
Solution : $L_n(1) = 1, L_n(-1) = (-1)^n$

Exercice 23 : (★)

Utiliser la somme des racines et calculer les deux premiers coefficients de $P^{(j)}$.

Exercice 24 :

Appliquer la formule de Taylor au point 0.

Exercice 25 :

Montrer que 1 est racine au moins double (resp. triple) du polynôme.

Exercice 26 : (★)

1. *Solution* : $P(X) - P'(X) = \frac{X^n}{n!}$.
2. Raisonner par l'absurde.

Exercice 27 : (★★)

Montrer que b et $-b$ sont racines doubles de P' pour avoir la forme de P' .

Solution : $\frac{15a}{8b^5} \left(\frac{1}{5} X^5 - \frac{2b^2}{3} X^3 + b^4 X \right)$

Exercice 28 :

Calculer $P(1), P'(1), P''(1), \dots$ jusqu'à arriver à une dérivée non nulle.

Solution : 1 est racine de multiplicité 4

Exercice 29 : 

La forme de la division euclidienne est : $X^n - 1 = (X - 3)^2 Q + aX + b$ et remarquer que 3 est racine au moins double de $(X - 3)^2 Q$.

Solution : $n3^{n-1}X + (1 - n)3^n - 1$

Exercice 30 : (★★★)

Déterminer une relation vérifiée par les racines de P' et réinjecter dans P . En déduire que les racines doubles éventuelles de P sont des racines $n - 1$ -èmes de l'unité puis que ce sont $-j$ ou $-j^2$.

Solution : P admet une racine double ssi $6|n - 1$

Exercice 31 : (★) Etudier la multiplicité des racines et appliquer le théorème de Rolle entre deux racines successives.

V Polynômes irréductibles

Exercice 32 : (★)

1. Raisonner par analyse-synthèse et montrer que si Q admet une racine, il admet une infinité de racines.

Solution : $Q = a, a \in \mathbb{R}$

2. Raisonner par analyse-synthèse et montrer que si P admet 0, -1, -2 et -3 comme racines. Se ramener ensuite à la question précédente.

Solution : $P = aX(X + 1)(X + 2)(X + 3), a \in \mathbb{R}$

Exercice 33 : (★★)

Ecrire P sous forme factorisée et faire deux cas : si P admet au moins deux racines distinctes et si P n'admet qu'une racine.

Exercice 34 : (★★) 

1. Montrer que $(\alpha + 1)^2$ et $(\alpha - 1)^2$ sont racines de P . On veut montrer que $|(\alpha + 1)^2| > |\alpha|$ ou $|(\alpha - 1)^2| > |\alpha|$. On raisonne par l'absurde : supposons $|(\alpha + 1)^2| \leq |\alpha|$ et $|(\alpha - 1)^2| \leq |\alpha|$. Alors : $|\alpha + 1|^2 + |\alpha - 1|^2 \leq 2|\alpha|$. Montrer que : $2(\operatorname{Re}(\alpha))^2 + 2(\operatorname{Im}(\alpha))^2 + 2 \leq 2|\alpha|$ puis que $|\alpha|^2 - |\alpha| + 1 \leq 0$. En déduire une contradiction en étudiant le signe du polynôme $X^2 - X + 1$.

2. Si α est racine de P , alors on peut construire une suite strictement croissante en module de racines de P donc P admet une infinité de racines. En déduire que P est constant puis effectuer une synthèse.

Solution : $P = 0$ ou $P = 1$.

Exercice 35 : (★★)

1. Commencer par déterminer la décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de $(X - 1)P_n$.

Solution : $\prod_{k=1}^n (X - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}})$

2. Calculer et simplifier $P_n(1)$.

Solution : $\frac{n+1}{2^n}$

Exercice 36 : 

1. *Solution :* $(X - 1)(X + 1)(X^2 + 3)$

2. Utiliser les complexes.

Solution : $2(X^2 - 2X + 2)(X^2 + X + \frac{1}{2})$

Exercice 37 : 

1. Utiliser les complexes.

Solution : $(X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2)$

2. *Solution :* $(X + 1)(X - 3)^2$

3. Utiliser les complexes.

Solution : $(X^2 - 2X + 2)(X^2 + 4)$

4. Remarquer que le polynôme est égal à $(X + 1)^6 - X^6$.

Solution : $(2X + 1)(3X^2 + 3X + 1)(X^2 + X + 1)$

Exercice 38 : (★)

Commencer par chercher les racines de P' afin d'obtenir la racine multiple de P .

Solution : $P = (X - 2)^2(X + 2 + \sqrt{6})(X + 2 - \sqrt{6})$

Exercice 39 : (★) Utiliser les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité et les rassembler avec leur conjugués.

Solution : $P = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n})$ et,

si $n = 2p$, $P = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{p-1} (X^2 - 2\cos \frac{2k\pi}{n} X + 1)$,

si $n = 2p + 1$, $P = (X - 1) \prod_{k=1}^p (X^2 - 2\cos \frac{2k\pi}{n} X + 1)$

Exercice 40 : (★) 

On a : $X^2 - 2(\cos a)X + 1 = (X - e^{ia})(X - e^{-ia})$ donc : $X^{2n} - 2(\cos a)X^n + 1 = (X^n - e^{ia})(X^n - e^{-ia})$. Or les racines de $X^n - e^{ia}$ sont les racines n -ièmes de e^{ia} , c'est-à-dire $e^{i(a+2k\pi)/n}$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Donc :


$$X^n - e^{ia} = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i(a+2k\pi)/n}).$$

D'où :

$$X^{2n} - 2(\cos a)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i(a+2k\pi)/n})(X - e^{-i(a+2k\pi)/n}).$$

$$\text{Solution : } \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2 \cos \left(\frac{a+2k\pi}{n} \right) X + 1 \right)$$

VI Introduction à la décomposition en éléments simples

Exercice 41 :  La décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{1}{X-1} - \frac{5}{X-2} + \frac{5}{X-3}.$$

$$\text{Solution : } x \mapsto \ln \frac{|x-1||x-3|^5}{|x-2|^5}.$$

Exercice 42 : (★) La décomposition en éléments simples dans \mathbb{C} donne :

$$\frac{13}{(X-1)(X^2+4X+8)} = \frac{1}{X-1} - \frac{2+3i}{4} \frac{1}{X+2+2i} - \frac{2-3i}{4} \frac{1}{X+2-2i}, \text{ puis, dans } \mathbb{R} : \frac{13}{(X-1)(X^2+4X+8)} = \frac{1}{X-1} - \frac{\frac{X+5}{X^2+4X+8}}{X^2+4X+8}.$$

Puis, pour obtenir une primitive : $\frac{13(X-1)(X^2+4X+8)}{X^2+4X+8} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{2} \frac{2X+4}{X^2+4X+8} - \frac{3}{4} \frac{1}{(\frac{1}{2}X+1)^2+1}.$

$$\text{Solution : } x \mapsto \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+8) - \frac{3}{2} \text{Arctan}(\frac{1}{2}x+1).$$

Exercice 43 : (★) La décomposition en éléments simples dans \mathbb{C} donne : $\frac{X^5}{X^4-1} = X + \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)} - \frac{1}{4(X-i)} - \frac{1}{4(X+i)},$ puis, dans $\mathbb{R} : \frac{X^5}{X^4-1} = X + \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)} - \frac{X}{2(X^2+1)}.$

$$\text{Solution : } x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{|x^2-1|}{x^2+1} \right)$$

$$\text{Exercice 44 : (★)} \quad \text{Solution : } \frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} \binom{n}{k}}{X-k}$$

Exercice 45 : (★)

$$1. \text{ Solution : } \frac{3X+8}{X(X+2)} = \frac{4}{X} - \frac{1}{X+2}.$$

2. Utiliser la décomposition en éléments simples et un changement de variable en $k+2$.

$$\text{Solution : } S_n = \frac{5}{2} - \frac{3n+5}{(n+1)(n+2)2^n}$$

$$3. \text{ Solution : } \lim S_n = \frac{5}{2}.$$

Exercice 46 : (★★)

1. Remarquer que $P = (X - x_k)Q$ où $Q = \lambda \prod_{j \in [1, n] \setminus \{k\}} (X - x_j).$

2. La forme de la décomposition en éléments simples est :

$$\frac{1}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{X - x_k}.$$

3. Evaluer en 0.