

# Indications du chapitre 15 :

## Polynômes

### I L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

**Exercice 1 : (★)**

Raisonner par coefficients indéterminés et par équivalences.

*Solution :*  $\{X^4 - 4X^3 + bX^2 + (8 - 2b)X + d, b, d \in \mathbb{C}\}$

**Exercice 2 : (★)**

Raisonner par coefficients indéterminés et par équivalences.

*Solution :*

**Exercice 3 : (★)**

- Montrer que  $\deg(P+Q) \leq n$  et calculer le coefficient de  $X^n$  et de  $X^{n-1}$ .

*Solution : si n est pair,  $\deg(P+Q) = n$ , si n est impair,  $\deg(P+Q) = n-1$ .*

- Montrer que  $\deg(P-Q) \leq n$  et calculer le coefficient de  $X^n$  et de  $X^{n-1}$ .

*Solution :  $\deg(P-Q) = n-1$  si n impair,  $n-2$  si n pair et  $n \neq 2$ ,  $-\infty$  si n = 2.*

**Exercice 4 : (★)**

Montrer que si P est solution alors P est de degré 2 puis raisonner par coefficients indéterminés.

*Solution :*  $\{a(X^2 - 1), a \in \mathbb{K}\}$

### II Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

**Exercice 5 :** 


Utiliser la formule du binôme de Newton.

**Exercice 6 : (★★)**

Remarquer que  $P \circ P - X = (P \circ P - P) + (P - X)$  puis écrire P sous la forme  $\sum_{k=0}^n a_k X^k$  et utiliser la factorisation de  $P^k - X^k$ .

Poser  $P = X^2 - 3X + 1$  et calculer  $P \circ P - X$ .  
*Solution :*  $\{2 \pm \sqrt{3}, 1 \pm \sqrt{2}\}$

**Exercice 7 :** 


- Solution :*  $Q = X + 8, R = 47X^2 - 13X - 26$

- Solution :*  $Q = \frac{1+i}{2}X + \frac{-1+2i}{2}, R = \frac{-5-4i}{2}X + \frac{5-8i}{2}$

**Exercice 8 :** 


- Solution :*  $Q = 2X^2 + 3X + 11, R = 25X - 5$

- Solution :*  $Q = X^2 + (1 - 2i)X - (2 + 3i), R = -(5 + i)$

**Exercice 9 : (★)**

Remarquer que R est de la forme  $aX + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  et évaluer en des valeurs intéressantes.

*Solution :*  $R = 1$

**Exercice 10 : (★)**

- Calculer  $A^2$ .

2. La forme de la division euclidienne est  $X^n = (X^2 - 7X + 10)Q + aX + b$ . Comme  $X^2 - 7X + 10 = (X - 2)(X - 5)$ , évaluer en 2 et en 5 pour trouver les valeurs de a et b.

*Solution :*  $R = \frac{1}{3}((5^n - 2^n)X + 5.2^n - 2.5^n)$

- Remarquer que la forme de la division euclidienne reste vraie pour A. *Solution :*  $A^n = \frac{1}{3}((5^n - 2^n)A + (5.2^n - 2.5^n)I_3)$

**Exercice 11 : (★★)**


- On a  $X^n = ((X^p - a) + a)^q X^r$ . Donc, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} X^n &= \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (X^p - a)^k a^{q-k} X^r \\ &= (X^p - a) \sum_{k=1}^q \binom{q}{k} (X^p - a)^{k-1} a^{q-k} X^r + a^q X^r. \end{aligned}$$

Conclure.

- Raisonner de même qu'à la question précédente, avec :

$$X^n - a^n = ((X^p - a^p) + a^p)^q X^r - a^n.$$

*Solution :*  $R = a^{pq} X^r - a^n$

- Ecrire les restes de divisions euclidiennes de  $X^{12}$ ,  $8X^{11}$ ,  $5(X^6 - 1)$ ,  $-3X^4$  et  $X^2$  par  $X^3 - 1$ .

*Solution :*  $R = 9X^2 - 3X + 1$

### III Evaluation polynomiale et racines

#### Exercice 12 : (★)

1. Faire le calcul.
2. Remarquer que  $z$  est racine de  $P$ ssi  $\sqrt{2} \frac{z+1}{z+2} \in \mathbb{U}_4$ .

Solution :  $\pm\sqrt{2}, \frac{-4+i\sqrt{2}}{3}$ .

#### Exercice 13 :

Remarquer que  $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$  et montrer que 1 et 2 sont racines de  $(X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$ .

#### Exercice 14 : (★)

Chercher  $a$  et  $b$  tels que  $i$  et  $-i$  soient racines de  $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 1$ .

Solution :  $(a, b) = (2, 1)$ .

#### Exercice 15 : (★★)

Montrer que  $(X-2)|(P-1)$ . Solution :  $((X-2)R+1, -X+5 - (X^2 - 5X + 7)R)$ ,  $R \in \mathbb{C}[X]$ .

#### Exercice 16 : (★★)

1. Avoir l'intuition du résultat puis le prouver par récurrence.

Solution :  $T_n$  est de degré  $n$  et de coefficient dominant  $2^{n-1}$  si  $n \neq 0$ , 1 si  $n = 0$ .

2. Montrer que  $T_n$  vérifie la relation, puis, pour l'unicité, se ramener à un polynôme admettant une infinité de racines.
3. En utilisant la relation précédente, trouver  $n$  racines de  $T_n$ . Justifier que ce sont les seules.

Solution :  $\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ ,  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

#### Exercice 17 :

Considérer un polynôme  $T$ -périodique et montrer que le polynôme  $P(X) - P(0)$  admet une infinité de racines.

Solution : L'ensemble des polynômes constants.

#### Exercice 18 :

1.  $(s, p)$  sont solutions d'un système linéaire.

Solution :  $s = 1, p = -2$

2.  $x$  et  $y$  sont racines du polynôme  $X^2 - X - 2$ .

Solution :  $(x, y) = (2, -1)$  ou  $(-1, 2)$

### IV Déivation dans $\mathbb{K}[X]$

#### Exercice 19 :

Pour  $Q$ , utiliser le degré de la somme de deux polynômes de degrés distincts, pour  $R$  obtenir une inégalité en utilisant la somme de deux polynômes puis étudier les coefficients dominants de  $XP'$  et  $P$ .

Solution :  $\deg(Q) = n+1, \deg(R) = n$ .

#### Exercice 20 : (★)

Déterminer le degré de  $P$  en raisonnant sur son coefficient dominant.

Solution :  $P = X^2 - X + c, c \in \mathbb{R}$ .

#### Exercice 21 : (★★)

Déterminer le degré de  $P$  en raisonnant sur son coefficient dominant.

Solution :  $P = aX, a \in \mathbb{R}$ .

#### Exercice 22 : (★)

1. Calculer le degré et le coefficient dominant de  $(X^2 - 1)^n$ .

Solution :  $L_n$  est de degré  $n$  et de coefficient dominant  $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$

2. Appliquer la formule de Leibnitz à  $(X+1)^n$  et  $(X-1)^n$ .

Solution :  $L_n(1) = 1, L_n(-1) = (-1)^n$

#### Exercice 23 : (★)

Utiliser la somme des racines et calculer les deux premiers coefficients de  $P^{(j)}$ .

#### Exercice 24 :

Appliquer la formule de Taylor au point 0.

#### Exercice 25 :

Montrer que 1 est racine au moins double (resp. triple) du polynôme.

#### Exercice 26 : (★)

1. Solution :  $P(X) - P'(X) = \frac{X^n}{n!}$ .

2. Raisonner par l'absurde.

#### Exercice 27 : (★★)

Montrer que  $b$  et  $-b$  sont racines doubles de  $P'$  pour avoir la forme de  $P'$ .

Solution :  $\frac{15a}{8b^5} \left( \frac{1}{5}X^5 - \frac{2b^2}{3}X^3 + b^4X \right)$

#### Exercice 28 :

Calculer  $P(1), P'(1), P''(1), \dots$  jusqu'à arriver à une dérivée non nulle.

Solution : 1 est racine de multiplicité 4

### Exercice 29 :

La forme de la division euclidienne est :  $X^n - 1 = (X - 3)^2 Q + aX + b$  et remarquer que 3 est racine au moins double de  $(X - 3)^2 Q$ .

Solution :  $n3^{n-1}X + (1 - n)3^n - 1$

### Exercice 30 : (★★★)

Déterminer une relation vérifiée par les racines de  $P'$  et réinjecter dans  $P$ . En déduire que les racines doubles éventuelles de  $P$  sont des racines  $n - 1$ -èmes de l'unité puis que ce sont  $-j$  ou  $-j^2$ .

Solution :  $P$  admet une racine double ssi  $6|n - 1$

### Exercice 31 : (\*)

Etudier la multiplicité des racines et appliquer le théorème de Rolle entre deux racines successives.

## V Polynômes irréductibles

### Exercice 32 : (\*)

1. Raisonner par analyse-synthèse et montrer que si  $Q$  admet une racine, il admet une infinité de racines.

Solution :  $Q = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$

2. Raisonner par analyse-synthèse et montrer que si  $P$  admet 0, -1, -2 et -3 comme racines. Se ramener ensuite à la question précédente.

Solution :  $P = aX(X + 1)(X + 2)(X + 3)$ ,  $a \in \mathbb{R}$

### Exercice 33 : (★★)

Ecrire  $P$  sous forme factorisée et faire deux cas : si  $P$  admet au moins deux racines distinctes et si  $P$  n'admet qu'une racine.

### Exercice 34 : (★★)

1. Montrer que  $(\alpha + 1)^2$  et  $(\alpha - 1)^2$  sont racines de  $P$ . On veut montrer que  $|(\alpha + 1)^2| > |\alpha|$  ou  $|(\alpha - 1)^2| > |\alpha|$ . On raisonne par l'absurde : supposons  $|(\alpha + 1)^2| \leq |\alpha|$  et  $|(\alpha - 1)^2| \leq |\alpha|$ . Alors :  $|\alpha + 1|^2 + |\alpha - 1|^2 \leq 2|\alpha|$ . Montrer que :  $2(\operatorname{Re}(\alpha))^2 + 2(\operatorname{Im}(\alpha))^2 + 2 \leq 2|\alpha|$  puis que  $|\alpha|^2 - |\alpha| + 1 \leq 0$ . En déduire une contradiction en étudiant le signe du polynôme  $X^2 - X + 1$ .
2. Si  $\alpha$  est racine de  $P$ , alors on peut construire une suite strictement croissante en module de racines de  $P$  donc  $P$  admet une infinité de racines. En déduire que  $P$  est constant puis effectuer une synthèse.

Solution :  $P = 0$  ou  $P = 1$ .

### Exercice 35 : (★★)

1. Commencer par déterminer la décomposition en polynômes irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  de  $(X - 1)P_n$ .

Solution :  $\prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}})$

2. Calculer et simplifier  $P_n(1)$ .

Solution :  $\frac{n+1}{2^n}$

### Exercice 36 :

1. Solution :  $(X - 1)(X + 1)(X^2 + 3)$

2. Utiliser les complexes.

Solution :  $2(X^2 - 2X + 2)(X^2 + X + \frac{1}{2})$

### Exercice 37 :

1. Utiliser les complexes.

Solution :  $(X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2)$

2. Solution :  $(X + 1)(X - 3)^2$

3. Utiliser les complexes.

Solution :  $(X^2 - 2X + 2)(X^2 + 4)$

4. Remarquer que le polynôme est égal à  $(X + 1)^6 - X^6$ .

Solution :  $(2X + 1)(3X^2 + 3X + 1)(X^2 + X + 1)$

### Exercice 38 : (\*)

Commencer par chercher les racines de  $P'$  afin d'obtenir la racine multiple de  $P$ .

Solution :  $P = (X - 2)^2(X + 2 + \sqrt{6})(X + 2 - \sqrt{6})$

### Exercice 39 : (\*)

Utiliser les racines  $n$ èmes de l'unité et les rassembler avec leur conjugués.

Solution :  $P = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n})$  et,

si  $n = 2p$ ,  $P = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{p-1} (X^2 - 2\cos \frac{2k\pi}{n} X + 1)$ ,

si  $n = 2p + 1$ ,  $P = (X - 1) \prod_{k=1}^p (X^2 - 2\cos \frac{2k\pi}{n} X + 1)$

### Exercice 40 : (\*)

On a :  $X^2 - 2(\cos a)X + 1 = (X - e^{ia})(X - e^{-ia})$  donc :  $X^{2n} - 2(\cos a)X^n + 1 = (X^n - e^{ia})(X^n - e^{-ia})$ . Or les racines de  $X^n - e^{ia}$  sont les racines  $n$ -ièmes de  $e^{ia}$ , c'est-à-dire  $e^{i(a+2k\pi)/n}$ ,  $k \in [0, n - 1]$ . Donc :

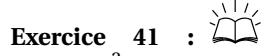
$$X^n - e^{ia} = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i(a+2k\pi)/n}).$$

D'où :

$$X^{2n} - 2(\cos a)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i(a+2k\pi)/n})(X - e^{-i(a+2k\pi)/n}).$$

$$Solution : \prod_{k=0}^{n-1} \left( X^2 - 2 \cos\left(\frac{a+2k\pi}{n}\right) X + 1 \right)$$

## VI Introduction à la décomposition en éléments simples



**Exercice 41 :** La décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{X^2 + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{1}{X-1} - \frac{5}{X-2} + \frac{5}{X-3}.$$

$$Solution : x \mapsto \ln \frac{|x-1||x-3|^5}{|x-2|^5}.$$

**Exercice 42 :** (\*) La décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}$  donne :

$$\frac{13}{(X-1)(X^2+4X+8)} = \frac{1}{X-1} - \frac{2+3i}{4} \frac{1}{X+2+2i} - \frac{2-3i}{4} \frac{1}{X+2-2i}, \text{ puis, dans } \mathbb{R} : \frac{13}{(X-1)(X^2+4X+8)} = \frac{1}{X-1} - \frac{X+5}{X^2+4X+8}.$$

Puis, pour obtenir une primitive :  $\frac{13}{(X-1)(X^2+4X+8)} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{2} \frac{2X+4}{X^2+4X+8} - \frac{3}{4} \frac{1}{(\frac{1}{2}X+1)^2+1}$ .

$$Solution : x \mapsto \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+8) - \frac{3}{2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}x+1\right).$$

**Exercice 43 :** (\*) La décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}$  donne :  $\frac{X^5}{X^4-1} = X + \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)} - \frac{1}{4(X-i)} - \frac{1}{4(X+i)}$ , puis, dans  $\mathbb{R}$  :  $\frac{X^5}{X^4-1} = X + \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)} - \frac{X}{2(X^2+1)}$ .

$$Solution : x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{|x^2-1|}{x^2+1}\right)$$

$$\text{Exercice 44 :} (*) \quad Solution : \frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}(n)_k}{X-k}$$

**Exercice 45 :** (\*)

$$1. \quad Solution : \frac{3X+8}{X(X+2)} = \frac{4}{X} - \frac{1}{X+2}.$$

2. Utiliser la décomposition en éléments simples et un changement de variable en  $k+2$ .

$$Solution : S_n = \frac{5}{2} - \frac{3n+5}{(n+1)(n+2)2^n}$$

$$3. \quad Solution : \lim S_n = \frac{5}{2}.$$

**Exercice 46 :** (\*\*)

1. Remarquer que  $P = (X - x_k)Q$  où  $Q = \lambda \prod_{j \in [1, n] \setminus \{k\}} (X - x_j)$ .

2. La forme de la décomposition en éléments simples est :

$$\frac{1}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{X - x_k}.$$

3. Evaluer en 0.