

I Relations de comparaison : cas des fonctions

Exercice 1 :

- Solution* : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$
- Solution* : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$
- Solution* : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln x$
- Utiliser les formules de conversion de sommes en produits.
Solution : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{a^2 - b^2}{2}x^2$

Exercice 2 : (★)

- Factoriser par $e^{x \ln a}$.
- Remarquer que $\tan\left(\frac{\pi}{2x+1}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2x+1} - \pi\right)$.
- Utiliser la quantité conjuguée.
- Mettre au même dénominateur et utiliser la quantité conjuguée.

Solution :

- $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln \frac{a}{b}$
- $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2\pi x$
- $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$
- $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{3x}{2\sqrt{2}}$

Exercice 3 :

- Solution* : $\frac{5}{9}$
- Solution* : $-\frac{1}{2}$

Exercice 4 : (★)

- Remarquer que $\tan x = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2} - x)}$ et $\tan(2x) = \tan(2x - \pi)$.
- Remarquer que $\tan \pi x = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2} - \pi x)}$ et $2x^2 - 3x + 1 = (x - \frac{1}{2})(2x - 2)$.

3. Remarquer que $\ln(\cos(ax)) = \ln(1 + (\cos(ax) - 1))$.

4. Remarquer que $\ln(\cos(x)) = \ln(1 + (\cos(x) - 1))$.

Solution :

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \tan 2x = -2$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1) \tan \pi x = \frac{1}{\pi}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} = \frac{a^2}{b^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos 2x} = -\frac{1}{4}$

Exercice 5 : (★)

- Solution* : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x \ln(1 + \ln(1 + x)) = 0$
- Solution* : $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{1/\sin x} = e$
- Solution* : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln x}{x^x - 1} = 1$

Exercice 6 : (★)

- Solution* : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (e^{\cos x - 1} - 1) = -\frac{1}{2}$
- Solution* : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x+1} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \right) = -2$

Exercice 7 : (★★)

Etudier le comportement des quotients.

- Solution* : $\ln(1 + 2x) = o(x \ln x)$
- Solution* : $\sqrt{x^2 + 3x} \ln(x^2) = O(x \ln x)$
- Solution* : $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = o\left(\frac{1}{x+1}\right)$
- Solution* : $\ln x = o(x^{-1/x})$

II Développements limités

Exercice 8 :

1. *Solution* : $1 + 2x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

2. Poser $h = x - \frac{\pi}{4}$.

Solution : $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2}{2} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3}{6} \right) + o(h^3)$

3. Poser $h = x - 1$.

Solution : $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{4} \right) + o((x-1)^2)$

Exercice 9 :

1. Poser $h = x - \frac{\pi}{3}$.

Solution : $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{4} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^3 + \frac{1}{48} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^4 + o \left(\left(x - \frac{\pi}{3} \right)^4 \right)$

2. Poser $h = x - e$.

Solution : $1 + \frac{1}{e} (x - e) - \frac{1}{2e^2} (x - e)^2 + \frac{1}{3e^3} (x - e)^3 - \frac{1}{4e^4} (x - e)^4 + o((x - e)^4)$

3. Poser $h = x - 1$.

Solution : $e + e(x - 1) + \frac{e}{2} (x - 1)^2 + \frac{e}{6} (x - 1)^3 + \frac{e}{24} (x - 1)^4 + o((x - 1)^4)$

4. Poser $h = x - 2$.

Solution : $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} (x - 2) + \frac{1}{8} (x - 2)^2 - \frac{1}{16} (x - 2)^3 + \frac{1}{32} (x - 2)^4 + o((x - 2)^4)$

Exercice 10 :

1. *Solution* : $1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$

2. *Solution* : $x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$

Exercice 11 : (★)

1. *Solution* : $x + x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$

2. *Solution* : $(x - 1) - \frac{3}{2}(x - 1)^2 + \frac{11}{6}(x - 1)^3 - \frac{25}{12}(x - 1)^4 + o((x - 1)^4)$

3. *Solution* : $1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{45}x^4 + o(x^4)$

4. *Solution* : $1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 - \frac{61}{240}x^6 + o(x^6)$

Exercice 12 :

1. *Solution* : $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} + x^2 - \frac{19x^3}{24} \right) + o(x^3)$

2. *Solution* : $\ln 5 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$

Exercice 13 :

1. *Solution* : $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$

2. *Solution* : $e \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} \right) + o(x^4)$

Exercice 14 :

1. *Solution* : $-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4)$

2. *Solution* : $-2x^2 - x^3 + o(x^3)$

Exercice 15 : (★★)

1. *Solution* : $e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 \right) + o(x^3)$

2. *Solution* : $1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5)$

Exercice 16 : (★)

1. *Solution* : $x^2 - x^3 + o(x^3)$

2. *Solution* : $e \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} \right) + o(x^5)$

3. *Solution* : $1 - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$

4. *Solution* : $\ln 3 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$

Exercice 17 : (★★)

On a : $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})$.

Donc : $\ln \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) = \ln \left(e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}) \right)$.

Factoriser le terme à l'intérieur du logarithme par e^x et remarquer que si $g(x) = o \left(\frac{x^{n+1}}{e^x} \right)$,

alors $g(x) = o(x^{n+1})$.

Solution : $x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})$

Exercice 18 : (★)

Solution : $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$

Exercice 19 : (★★)

1. *Solution* : $1 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{72}x^4 + o(x^4)$

2. *Solution* : $2 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)$

Exercice 20 : (★★)

1. *Solution* : $\frac{1}{3} + \frac{1}{36}x^2 + o(x^3)$

2. *Solution* : $e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} \right) + o(x^2)$

Exercice 21 :

Calculer le développement limité à l'ordre 4 de la dérivée de Arcsin puis primitiver.

Solution : $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$

Exercice 22 : (★)

Calculer le développement limité de F' , où $F : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$, à un ordre bien choisi.

Solution : $x^2 - x^3 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{6}x^9 - \frac{1}{40}x^{10} + o(x^{13})$

Exercice 23 : (★★)

Déterminer le développement limité de la dérivée de $h \mapsto f\left(h + \frac{\pi}{3}\right)$

Solution : $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{3}{16}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right)$

III Applications des développements limités

Exercice 24 :

- Solution :* $\frac{1}{6}$
- Solution :* -1

Exercice 25 : (★)

- Solution :* $\frac{1}{3}$
- Solution :* $-\frac{e}{2}$
- Solution :* $-\frac{1}{2}$

Exercice 26 : (★★)

- Solution :* $e^{1/3}$
- Poser $t = \frac{1}{x}$ et utiliser les équivalents pour se ramener à une limite connue.
Solution : 1
- Solution :* $\frac{1}{8}$

Exercice 27 :

Calculer les développements limités de f et de f' à un ordre bien choisi.

Exercice 28 :

Solution : La tangente a pour équation $y = x + \ln 2$, au voisinage de 0^+ (resp. 0^-), la courbe est en dessous (resp. au dessus) de sa tangente.

Exercice 29 : (★)

Solution : La tangente a pour équation $y = 2x - 1$, au voisinage de 1^+ (resp. 1^-), la courbe est en-dessous (resp. au-dessus) de sa tangente.

Exercice 30 :

Solution : La courbe a pour asymptote $y = x + \frac{1}{2}$ (resp. $y = -x - \frac{1}{2}$), au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), la courbe est au dessus (resp. au dessous) de son asymptote.

Exercice 31 : (★)

Solution : La courbe admet une asymptote d'équation $y = x + 2$ et la courbe est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ et en dessous au voisinage de $-\infty$.

IV Relations de comparaison : cas de suites

Exercice 32 :

- Solution :* $x_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$
- Solution :* $x_n \sim \frac{2}{n^2}$
- Solution :* $x_n \sim \frac{1}{n}$
- Utiliser la limite en 0 de $\frac{e^x - 1}{x}$.
Solution : $x_n \sim \frac{\ln n}{n}$
- Solution :* $x_n \sim \frac{1}{n}$
- Calculer la limite de (x_n) .
Solution : $x_n \sim \sqrt{3}$
- Calculer la limite de (x_n) .
Solution : $x_n \sim (\sqrt{3})^\pi$

Exercice 33 : (★★)

- Majorer, à partir d'un certain rang le quotient $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ par une constante bien choisie et utiliser des inégalités géométriques.
- Utiliser le résultat de la première question.
- Utiliser le résultat de la première question.

Exercice 34 :

- Remarquer que $\sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$.
Solution : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \sin \frac{1}{n^2} = +\infty$
- Remarquer que $\left(n^{1/n^2} - 1\right) = e^{\frac{\ln n}{n^2}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n^2}$.
Solution : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^{1/n^2} - 1\right) = 0$
- Remarquer que $\ln \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{1}{n}$.
Solution : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} = 1$

Exercice 35 :

1. *Solution :* $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
2. *Solution :* $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = e^{-2}$
3. *Solution :* $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n-x}\right)^n = e^x$
4. *Solution :* $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 5n + 4}{n^2 - 3n + 7}\right)^n = e^8$

V Problèmes d'analyse asymptotique

Exercice 36 : (★★)

Utiliser l'imparité de f^{-1} et la composition des développements limités pour la relation $x = f^{-1}(xe^{x^2})$.

Solution : $x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o(x^5)$

Exercice 37 : (★)

1. Etudier la fonction $x \mapsto x^3 + nx$.
2. Utiliser la croissance de $x \mapsto x^3 + nx$.
3. Remarquer que $x_n = \frac{1}{n} - \frac{x_n^3}{n}$ et que $x_n = o(1)$ donc $x_n^3 = o(1)$.
4. Montrer que $x_n \sim \frac{1}{n}$ et en déduire que $x_n^3 = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 38 : (★)

1. Par récurrence.
2. Appliquer l'encadrement précédent à u_{n-1} pour en déduire un encadrement de u_n .
3. Remplacer u_{n-1} par $\sqrt{n-1} + o(\sqrt{n})$ dans la relation de récurrence.
Solution : $\frac{1}{2}$.

Exercice 39 : (★)

1. Reasonner par récurrence.
Solution : $\lim u_n = 1$
2. Remarquer que $u_n = 1 + o(1)$ et réinjecter dans la définition.

3. Réinjecter le résultat précédent dans la définition.
4. Réinjecter le résultat précédent dans la définition.

Exercice 40 : (★★)

1. Montrer l'application $x \mapsto \tan x - \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$ est continue, strictement croissante sur $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ et calculer ses limites.
2.
 - On a : $\tan x_n = \frac{\text{sh}(x_n)}{\text{ch}(x_n)}$ et donc : $\tan(x_n - n\pi) = \frac{\text{sh}(x_n)}{\text{ch}(x_n)}$. Montrer que $x_n - n\pi \in]0, \frac{\pi}{2}[$. En déduire que $x_n - n\pi = \text{Arctan}\left(\frac{\text{sh } x_n}{\text{ch } x_n}\right)$.
 - Montrer que $\lim x_n = +\infty$ puis que $\lim \frac{\text{sh } x_n}{\text{ch } x_n} = 1$, en déduire que $\lim x_n - n\pi = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$.
 - Montrer que : $\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(1) \sim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}(x - 1)$.
En déduire que : $x_n - n\pi - \frac{\pi}{4} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\text{sh } x_n}{\text{ch } x_n} - 1\right)$.
Montrer que : $\frac{\text{sh } x_n}{\text{ch } x_n} - 1 = \frac{-2e^{-x_n}}{e^{x_n} + e^{-x_n}} = \frac{-2e^{-2x_n}}{1 + e^{-2x_n}}$ puis que $\frac{\text{sh } x_n}{\text{ch } x_n} - 1 \sim -2e^{-2x_n}$.
En déduire que : $x_n - n\pi - \frac{\pi}{4} \sim -e^{-2x_n}$.
Conclure en utilisant $\lim(x_n - (n\pi + \frac{\pi}{4})) = 0$.

Solution : $l = \frac{\pi}{4}, x_n - n\pi - l \sim -e^{-2(n\pi + \frac{\pi}{4})}$

Exercice 41 : (★★★)

Etudier la fonction $x \mapsto x - \ln x$.

Montrer que (u_n) est croissante et non majorée (on peut raisonner par l'absurde).

Montrer ensuite que $u_n \sim n$ puis que $u_n - n \sim \ln n$.

Justifier et simplifier alors la relation : $u_n - n = \ln(n + \ln n + o(\ln n))$.

Exercice 42 : (★★) On pose :

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
2. Effectuer une intégration par parties.
3. Remarquer que $nI_n = 1 - I_n - 2I_{n+1}$ et que $n(nI_n - 1) = -nI_n - 2nI_{n+1}$.
4. Traduire les limites en termes d'équivalents puis de développement asymptotique.