

I Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 :

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Solution : E est un espace vectoriel
2. Exhiber un contre-exemple de somme de deux éléments de F qui n'est pas dans F .
Solution : F n'est pas un espace vectoriel
3. Prouver que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Solution : G est un espace vectoriel
4. Prouver que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Solution : H est un espace vectoriel

Exercice 2 :

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Solution : E est un espace vectoriel
2. Prouver que F est une intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
Solution : F est un espace vectoriel
3. Exhiber un contre-exemple de somme de deux éléments de G qui n'est pas dans G .
Solution : G n'est pas un espace vectoriel
4. Prouver que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Solution : H est un espace vectoriel

Exercice 3 : (★)

1. Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$.
3. Montrer que E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 4 : (★)

1. *Solution : $E \cap F = \{0\}$.*
2. Pour l'inclusion réciproque, partir de $(x, y, z) \in E$ et résoudre le système d'inconnues λ et $\mu : (x, y, z) = \lambda u + \mu v$.
Solution : $\text{Vect}(u, v) = E$.

Exercice 5 : (★★)

1. *Solution : $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$*

2. *Solution : $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$*

Raisonner par double inclusion.

Exercice 6 :

Prouver l'existence et l'unicité de la décomposition de tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .

Exercice 7 : (★★)

1. On peut raisonner par double inclusion et se ramener à la résolution d'un système.
2. Montrer l'existence et l'unicité de la décomposition.

Exercice 8 : (★★)

1. (a) Choisir $x \notin E_1$ et prouver qu'il convient.
(b) Choisir $x \notin E_2$ et prouver qu'il convient.
2. (a) Choisir $x \notin E_3$ et $y \notin \text{Vect}\{(1, 2, 2), x\}$ et prouver qu'ils conviennent.
(b) Choisir $x \notin E_4$ et $y \notin \text{Vect}\{(1, 0, 1), x\}$ et prouver qu'ils conviennent.

Exercice 9 : (★★)

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Raisonner par analyse-synthèse.

Exercice 10 : (★)

Raisonner par analyse-synthèse.

Exercice 11 : (★★)

Montrer d'abord que F et G sont des sous espaces vectoriels de E puis utiliser la définition d'espaces supplémentaires en raisonnant par analyse/synthèse.

Exercice 12 : (★★★)

1. Utiliser la définition.
2. Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On pose $f_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \prod_{j \neq i} (x - a_j)$. Montrer que $\text{Vect}\{f_i, i \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$ est un supplémentaire de F dans E .

II Familles finies de vecteurs

Exercice 13 :

1. Solution : Libre
2. Solution : Libre
3. Solution : Liée
4. Solution : Liée

Exercice 14 :

Utiliser la définition d'une famille libre et prendre des valeurs particulières de x bien choisies.

Exercice 15 : (★)

Utiliser la définition d'une famille libre et prendre des valeurs particulières de x bien choisies.

Exercice 16 : (★)

Partir de $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k u_k = 0_E$ et montrer que $\lambda_{n+1} = 0$.

Exercice 17 : (★)

Exprimer a, b, c en fonction de u, v, w pour prouver l'implication réciproque.

Exercice 18 : (★)

Se ramener à un polynôme s'annulant en $\cos x$ donc ayant une infinité de racines

Exercice 19 : (★)

1. Prendre des valeurs bien choisies de x .
Solution : La famille est libre.
2. Exhiber une combinaison linéaire nulle en utilisant les formules de trigonométrie.
Solution : La famille est liée.

Exercice 20 : (★)

Partir d'une combinaison linéaire nulle et choisir des valeurs particulières de n .

Exercice 21 : (★★)

1. On peut supposer, quitte à les réordonner, que $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.
Soient $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\sum_{i=1}^n \mu_i f_i = 0$.
Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \mu_i e^{\lambda_i x} = 0$.
Factoriser cette expression par $e^{\lambda_n x}$ puis faire tendre x vers $+\infty$, en remarquant que si $i \neq n, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(\lambda_i - \lambda_n)x} = 0$. En déduire que $\mu_n = 0$.
En réitérant, on a $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$. Conclure.
Solution : La famille est libre.

2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0$.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \lambda_k \sin(kx) = 0$.

Soit $m \in \mathbb{N}$, en dérivant m fois la relation précédente et en factorisant par n^m , montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(\frac{k}{n}\right)^m \sin^{(m)}(kx) = 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, faire tendre m vers $+\infty$ en remarquant que, pour tout $k, (\sin^{(m)}(kx))_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée.

En déduire que $\lambda_n = 0$ et conclure en réitérant. Solution : La famille est libre.

Exercice 22 : (★★)

- Soient $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$. On a :

$$\sum_{i=1}^n \mu_i v_i = \sum_{i=1}^n \mu_i (u + e_i) = \dots = \sum_{k=1}^n \left(\mu_k + \lambda_k \sum_{i=1}^n \mu_i \right) e_k.$$

- Supposons que $(v_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ soit liée. Alors il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \neq (0, \dots, 0)$ tels que $\sum_{i=1}^n \mu_i v_i = 0$ donc comme $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre, on a, pour tout $k, \mu_k + \lambda_k \sum_{i=1}^n \mu_i = 0$. Conclure en sommant les relations précédentes.
- Supposons $\sum_{i=1}^n \lambda_i = -1$, poser $\mu_k = \lambda_k$ et montrer que $(\mu_1, \dots, \mu_n) \neq (0, \dots, 0)$ et que $\sum_{i=1}^n \mu_i v_i = 0$. Conclure.

Exercice 23 : (★★)

Raisonner par récurrence forte.

Exercice 24 :

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Chercher deux vecteurs qui engendrent E et prouver qu'ils forment une famille libre.

Exercice 25 : (★)

Remarquer que les $P \in \mathbb{R}_3[X]$, tels que $P(1) = P(2) = 0$ sont de la forme : $P = (X - 1)(X - 2)(aX + b)$ et faire apparaître une famille génératrice de E .

Solution : $((X - 1)(X - 2)X, (X - 1)(X - 2))$

Exercice 26 : (★)

1. Résoudre le système formé par les deux équations.
Solution : $((-5, 1, 3))$
2. Exprimer t en fonction de x, y, z par exemple.
Solution : $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 3), (0, 0, 1, -1))$
3. En raisonnant par coefficients indéterminés, montrer que les éléments de F_3 sont de la forme : $a(X^3 - 1)$.
Solution : $(X^3 - 1)$

Exercice 27 : (★)

Résoudre $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0$.

Solution : (e_1, e_2)

Exercice 28 :

Pour la base, chercher la forme factorisée des éléments de E .

Solution : $((X-a)(X-b), (X-a)(X-b)X, (X-a)(X-b)X^2)$ est une base de E .

III Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 29 :

- Solution : Base : $((1, 0, 1), (3, 1, 0))$, dimension 2*
- Solution : Base : $((3, 1, -4))$, dimension 1*
- Solution : Base : (X, X^2) , dimension 2*
- Solution : Base : $\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$, dimension 3*
- Solution : Base : $(Id_{\mathbb{R}}, x \mapsto e^x)$, dimension 2*

Exercice 30 :

- Solution : Base : $((2, 1, 0), (-3, 0, 1))$, dimension 2*
- Solution : Base : $((6, 3, 2))$, dimension 1*
- Solution : Base : $((1, -1, 1, -1))$, dimension 1*
- Solution : Base : $(X^4 - 1, X^3 - 1, X^2 - 1, X - 1)$, dimension 4*

Exercice 31 : (★)

Solution : $\left(\left(-\frac{1+i}{2}, 1, \frac{i-1}{2} \right) \right)$ est une base de F et $\dim F = 1$.

Exercice 32 : (★)

On pose : $F = \{P \in \mathbb{C}_5[X], P(-X) = -P(X)\}$.

- Chercher une base de F .
Solution : $\dim F = 3$.
- Utiliser la base canonique de $\mathbb{C}_5[X]$.
Solution : $(1, X^2, X^4)$.

Exercice 33 : (★)

Compléter avec deux vecteurs bien choisis.

Exercice 34 :

Se ramener à une famille libre.

- Solution : 2*
- Solution : 2*

*3. Solution : 3***Exercice 35 : (★)**

Il suffit d'étudier la liberté de $\mathcal{B}'$.

Solution : $\sum_{k=1}^n x_k \neq 1$

Exercice 36 :

Se ramener à une famille libre.

- Solution : 4*
- Solution : 3*

Exercice 37 : (★)

- Remarquer que la famille est de degrés échelonnés.
Solution : 3
- Montrer que la famille est libre en faisant des évaluations en 1 et des simplifications.
Solution : $n+1$

IV Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

Exercice 38 :

Remarquer qu'un supplémentaire est de dimension 1.

Soution : $\text{Vect}(X^2)$

Exercice 39 : (★)

Remarquer que $\text{rg}(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}') = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F}) + \text{Vect}(\mathcal{F}'))$.

Exercice 40 : (★)

Montrer que les familles (u, v, w) et (x, y) sont libres.

Remarquer que $\dim(F + G) = \text{rg}(u, v, w, x, y)$.

Solution : $\dim F = 3, \dim G = 2, \dim F \cap G = 1$.

Exercice 41 : (★★)

Comme $\{e_1, \dots, e_n\} = \{e_1, \dots, e_r\} \cup \{e_{r+1}, \dots, e_n\}$, remarquer que : $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) + \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$.

Or $\dim \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{rg}(e_1, \dots, e_n) = s$ et :

$\dim(\text{Vect}(e_1, \dots, e_r) + \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)) \leq \dim(\text{Vect}(e_1, \dots, e_r)) + \dim(\text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n))$.

Justifier que $\dim \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n) \leq n - r$ pour conclure.

Exercice 42 : (★★)

- Raisonner par analyse-synthèse.

Solution : $\forall (x_n) \in E, \exists!((u_n), (v_n)) \in F \times G, (x_n) = (u_n) + (v_n)$ avec : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{4}(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n)$ et $v_n = \frac{1}{4}(-x_{n+2} + 2x_{n+1} + 3x_n)$.

- Utiliser la formule de Grassmann et les résultats sur les suites.

Solution : $\dim E = 3$