

I Révisions de calcul intégral

Exercice 1 :

- Effectuer une intégration par parties.
Solution : $2e - 8e^{-1}$
- Effectuer une intégration par parties.
Solution : $\frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}-1}{(n+1)^2}$
- Effectuer le changement de variable $u = \frac{t}{2}$.
Solution : $\frac{\pi^2}{8}$

Exercice 2 :

- Effectuer une intégration par parties.
Solution : $2(\ln(2))^2 - 4\ln(2) + 2$
- Effectuer le changement de variable $t = \sin u$.
Solution : $\frac{\pi}{2}$
- Effectuer le changement de variable $u = \ln(t)$.
Solution : $\frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t + t(\ln t)^2} dx$ Solution : $\frac{\ln(2)}{2}$

Exercice 3 : (★)

- Effectuer une intégration par parties pour le calcul de u_1 et de u_n .
Solution : $u_0 = e - 1$, $u_1 = e - 2$
- Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 0 et que $u_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^x dx$.
Solution : $\lim u_n = 0$
- Montrer que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = u_0 - u_n$.

Exercice 4 :

Effectuer le changement de variable $t = \frac{1}{x}$.
Solution : $\frac{\pi}{12}$

Exercice 5 :

Effectuer le changement de variable $x = \tan(t)$ et linéariser l'expression obtenue.
Solution : $\frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$

II Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Exercice 6 :

Solution : $\int_{-1}^2 x|x|dx = \frac{7}{3}$, $\int_{-1}^1 x|x|dx = 0$

Exercice 7 :

Utiliser, pour $x > 1$ et pour $t \in [x, x^3]$, $\ln t \leq \ln(x^3)$ pour minorer l'intégrale.
Solution : $+\infty$

Exercice 8 : (★)

- Faire le cas où les fonctions sont croissantes puis celui où les fonctions sont décroissantes.
- Intégrer l'inégalité précédente par rapport à x puis par rapport à y .

Exercice 9 : (★)

Se ramener à la primitivation d'un développement limité.
Solution : $\ln 3$

Exercice 10 : (★★★)

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}}$.
- Justifier l'existence de $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = M$.
- Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap [a, b], f(x) \geq M - \varepsilon.$$

- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq (M - \varepsilon)(2\eta)^{\frac{1}{n}}$.
- Conclure en utilisant la définition de la limite.

Exercice 11 : (★★)

Utiliser la relation de Chasles pour obtenir une somme de deux intégrales dont une est une intégrale sur un voisinage de $+\infty$.

Exercice 12 : (★)

Poser, après avoir justifié son existence, $M = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Montrer alors, en utilisant des inégalités que, pour tout $x \in [0, 1]$, $|g(x)| \leq Mx$ puis que $|f(x)| \leq \frac{M}{2}$. En déduire que $M = 0$.

Exercice 13 : (★★)

Supposer que f ne s'annule pas sur $]0, 1[$ et, en utilisant $\int_0^1 f = 0$, obtenir une contradiction.
 Supposer que f s'annule en un unique point $\alpha \in]0, 1[$ et, en utilisant $g : t \mapsto (t - \alpha)f(t)$ et les hypothèses, obtenir une contradiction. Ne pas oublier le cas où f s'annule sans changer de signe.

Exercice 14 : (★)

Après avoir calculé $\int_0^1 (f^2 - f)^2$, montrer que : $\forall x \in [0, 1], f(x) \in \{0, 1\}$. Utiliser un argument de continuité pour en déduire que f est constante.

Solution : $\int_0^1 (f^2 - f)^2 = 0$, les fonctions vérifiant la relation sont la fonction constante égale à 0 et la fonction constante égale à 1.

Exercice 15 : (★★)

- Supposer que f admet exactement j zéros, $\lambda_1 < \dots < \lambda_j$ avec changement de signe et $j \leq n$.
- En faisant un tableau de signe, montrer que $x \mapsto f(x) \cdot \prod_{k=1}^j (x - \lambda_k)$ est de signe constant.
- En remarquant que $x \mapsto \prod_{k=1}^j (x - \lambda_k)$ est polynomiale de degré $j \leq n$, montrer que :

$$\int_a^b f(x) \cdot \prod_{k=1}^j (x - \lambda_k) dx = 0.$$

- En déduire que f est nulle.

Exercice 16 : (★★)

- Utiliser f bornée et atteint ses bornes et le théorème des valeurs intermédiaires.
- (a) Solution : $\frac{1}{2}f(0)$
 (b) Solution : $\ln 2 \cdot f(0)$

III Sommes de Riemann

Exercice 17 :

Reconnaître une somme de Riemann.

Solution : $\ln 2$

Exercice 18 :

- Solution : $\frac{\pi}{4}$
- Solution : $\frac{1}{2} \ln 2$
- Solution : $\frac{1}{\ln 2}$

Exercice 19 : (★)

- Solution : $\frac{4}{e}$
- Solution : $\frac{4}{e}$

Exercice 20 : (★)

Poser $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + k^2}$ et calculer $\lim u_n$ puis en déduire $\lim u_{2n}$.

Solution : $\frac{\ln 5}{2}$

Exercice 21 : (★★)

Montrer que :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)}.$$

En utilisant les sommes de Riemann, en déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)} = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx.$$

Effectuer le changement de variable $x = \cos^2 t$.

En déduire que :

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^2(t) dt.$$

Utiliser des formules de trigonométrie pour avoir :

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(4t)) dt.$$

Solution : $\frac{\pi}{8}$

IV Lien entre intégrale et primitive

Exercice 22 :

Après avoir justifié son existence, introduire une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$.

Solution : $f'(x) = \frac{2x}{\operatorname{ch}(x^2)} + \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$

Exercice 23 : (★)

Effectuer le changement de variable $u = t + x^2$.

Solution : $f'(x) = (2x + 1) \operatorname{Arctan}(x^2 + x) - 2x \operatorname{Arctan}(x^2)$.

Exercice 24 : (★)

Utiliser la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$.

Exercice 25 : (★★)

1. Appliquer le théorème des accroissements finis à une primitive de f entre y et $y + a$.
2. Simplifier l'expression pour se ramener à la question précédente.
3. Effectuer une intégration par parties.

$$\text{Solution : } \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$

Exercice 26 : (★★)

1. En utilisant la relation de Chasles, écrire F comme la somme d'une intégrale de 0 à x et d'une intégrale de x à 1. En déduire que F est dérivable et calculer F' .
Montrer que F' est dérivable et calculer F'' .
Montrer que F'' est continue.

2. Montrer que $F'(x) = \int_x^1 f(t) dt$ et remarquer que $F(x) - F(0) = \int_0^x F'(u) du$.

$$\text{Solution : } F'(x) = \int_x^1 f(t) dt$$

Exercice 27 : (★★)

Etudier la fonction $F : x \mapsto e^{-kx} \int_0^x f(t) dt$.

Exercice 28 : (★★)

Effectuer le changement de variable $u = tx$ pour montrer la dérivabilité sur $\mathbb{R}^*$ et utiliser un

développement limité pour étudier la dérivabilité en 0.

$$\text{Solution : } f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - e^x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 29 : (★★★)

Poser $\varphi : x \mapsto \int_0^x fg$, prouver et intégrer l'inéquation : $\frac{\varphi'}{C + \varphi} \leq g$.

V Inégalité de Taylor-Lagrange

Exercice 30 :

Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $\exp$ entre 0 et x .

Exercice 31 : (★)

Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 1 pour la minoration et à l'ordre 3 pour la majoration.

Exercice 32 : (★★)

Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre x et a puis entre x et $-a$.