

## I Espérance

### Exercice 1 :

- Montrer que  $\sum_{k=1}^6 P(X = k) = 1$ .
- Appliquer la définition de l'espérance.  
*Solution* :  $E(X) = \frac{13}{3}$ .
- Appliquer la formule de transfert.  
*Solution* :  $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{2}{7}$ .

### Exercice 2 :

- Calculer  $P(X_i = 1)$ .  
*Solution* :  $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ ,  $E(X_i) = p$  avec :  $p = \frac{r(2r-1)}{n(2n-1)}$ .
- Remarquer que  $X = X_1 + \dots + X_n$ .  
*Solution* :  $E(X) = \frac{r(2r-1)}{(2n-1)}$ .

### Exercice 3 : (★)

- Utiliser la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements  $(T = m)_{m \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ .  
*Solution* :  $Y_k \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ .
- Solution* :  $X = \sum_{k=1}^n k Y_k$ .
- Utiliser la linéarité de l'espérance. *Solution* :  $E(X) = \frac{n(n+1)}{4}$ .

### Exercice 4 : (★)

Montrer que  $P(U = k) = \frac{2k-1}{n^2}$ , pour calculer  $E(V)$ , remarquer que  $U + V = X + Y$ .  
*Solution* :  $E(U) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$ ,  $E(V) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$ .

### Exercice 5 : (★★)

- Solution* :  $P(X_1 = 2) = P(X_1 = 4) = \frac{1}{2}$ ,  $P(X_2 = 1) = P(X_2 = 5) = \frac{1}{6}$ ,  $P(X_2 = 3) = \frac{2}{3}$ .
- Utiliser la formule des probabilités totales.  
*Solution* :  $P(X_{n+1} = k) = \frac{7-k}{6} P(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6} P(X_n = k+1)$

- Utiliser la formule de transfert.

*Solution* :  $E(X_{n+1}) = 1 + \frac{2}{3}E(X_n)$  et  $E(X_n) = 3$ .

### Exercice 6 : (★★)

Introduire la variable aléatoire  $U_k$  qui vaut 1 si la puce effectue un saut vers la droite à l'instants  $k$  et 0 sinon. Alors  $U_k \sim \mathcal{B}(p)$  et remarquer que  $X_n = 2 \sum_{k=1}^n U_k - n$ .

*Solution* :  $P(X_n = 2k - n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ,  $E(X_n) = n(2p-1)$ .

## II Variance, écart type et covariance

### Exercice 7 :

- Solution* :  $X \sim \mathcal{B}\left(6, \frac{3}{10}\right)$ ,  $E(X) = \frac{9}{5}$  et  $V(X) = \frac{63}{50}$ .
- Remarquer que  $Y = 3X - 5(6 - X) = 8X - 30$ .  
*Solution* :  $E(Y) = -\frac{78}{5}$  et  $V(Y) = \frac{2016}{25}$ .

### Exercice 8 :

Calculer la loi de  $X$ , puis  $E(X)$  et  $E(X^2)$ .

*Solution* :  $V(X) = \frac{14}{25}$ .

### Exercice 9 : (★★)

- Calculer  $P(X_2 = 0)$ ,  $P(X_2 = 1)$ ,  $P(X_3 = 0)$ ,  $P(X_3 = 1)$ ,  $P(X_3 = 2)$ .  
*Solution* :  $X_2 \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $E(X_2) = \frac{1}{2}$ ,  $V(X_2) = \frac{1}{4}$   
 $P(X_3 = 0) = \frac{1}{4}$ ,  $P(X_3 = 1) = \frac{1}{2}$ ,  $P(X_3 = 2) = \frac{1}{4}$ ,  $E(X_3) = 1$ ,  $V(X_3) = \frac{1}{2}$ .
- Solution* :  $X_n$  est à valeurs dans  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $P(X_n = 0) = \frac{1}{2^{n-1}}$ ,  $P(X_n = n-1) = \frac{1}{2^{n-1}}$ .
- Utiliser la formule des probabilités totales appliquée à "les côtes obtenus aux lancers  $n$  et  $n+1$  sont égaux" et à son contraire.
- (a) Remarquer que  $E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} k P(X_n = k)$  et  $E(X_n^2) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 P(X_n = k)$ . *Solution* :  
 $Q_n(1) = 1$ ,  $V(X_n) = Q_n''(1) + Q_n'(1) - (Q_n'(1))^2$ .  
(b) Utiliser le résultat de la question 3.

(c) Remarquer que  $(Q_n(s))$  est géométrique et calculer  $Q_2(s)$ .

*Solution* :  $Q_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}$

(d) Utiliser 4.a.

*Solution* :  $E(X_n) = \frac{n-1}{2}, V(X_n) = \frac{n-1}{4}$ .

**Exercice 10 : (★★)**

1. Remarquer que  $P(Y \leq k) = \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}}$  et que  $P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k-1)$ .

*Solution* :  $P(Y = k) = \frac{2k(k-1)}{n(n-1)}$  pour  $k \geq 2$ .

2. On a  $E(Y) = \sum_{k=2}^n \frac{2k(k-1)}{n(n-1)}$ . On utilisera les valeurs de  $\sum_{k=1}^n k$  et de  $\sum_{k=1}^n k^2$ .

On raisonne de même pour la variance.

*Solution* :  $E(Y) = \frac{2(n+1)}{3}, V(Y) = \frac{(n-2)(n+1)}{18}$

3. Remarquer que  $P(X \geq k) = \frac{\binom{n-k+1}{2}}{\binom{n}{2}}$  et que  $P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1)$ .

*Solution* :  $P(X = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$  pour  $k \leq n-1$ .

4. Montrer que  $P(Y = k) = P(n+1 - X = k)$ .

Comme  $Y$  et  $n+1 - X$  ont mêmes lois, on a  $E(Y) = E(n+1 - X) = n+1 - E(X)$  et  $V(Y) = V(n+1 - X) = V(X)$ .

*Solution* :  $E(X) = \frac{n+1}{3}, V(X) = \frac{(n-2)(n+1)}{18}$

**Exercice 11 : (★★)**

1. Sommer les valeurs données.

*Solution* :  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  et  $P(Y = k) = \frac{(1-p)^n}{n} + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

2. Reconnaître l'espérance d'une loi binomiale.

*Solution* :  $E(Y) = \frac{(1-p)^n(n+1)}{2} + np$

3. Calculer, par exemple,  $P(X = 1) \cdot P(Y = 2)$ .

*Solution* :  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

4. Utiliser la définition de la loi conditionnelle.

*Solution* : sachant  $X = j \neq 0, Y \sim j$ , et sachant  $X = j = 0, Y \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ .

5. Utiliser la formule du transfert et se ramener à la variance d'une loi binomiale.

*Solution* :  $cov(X, Y) = np(1-p)\left(1 - \frac{n+1}{2}(1-p)^{n-1}\right)$  et  $X$  et  $Y$  sont décorrélées ssi  $p = 1 - \left(\frac{2}{n+1}\right)^{1/(n-1)}$ .

### III Inégalités probabilistes

**Exercice 12 : (★)**

1. *Solution* :  $X \sim \mathcal{B}(100, \frac{5}{100}), Y \sim \mathcal{B}(400, \frac{1}{10})$

2. Comme  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .

*Solution* :  $E(Z) = 45, V(Z) = \frac{163}{4}$ .

3. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

*Solution* :  $c \geq 74$

**Exercice 13 : (★★)**

1. *Solution* :  $E(X) = 2n$  et  $V(X) = n$ .

2. *Solution* :  $P(X \geq 3n) \leq \frac{2}{3}$ .

3. Remarquer que  $(|X - 2n| \geq n) = (X \geq 3n) \cup (X \leq n)$  et que  $P(X \geq 3n) = P(X \leq n)$ .

*Solution* :  $P(X \geq 3n) \leq \frac{1}{2n}$ .

4. Calculer  $E(Y)$  en utilisant la formule de transfert.

*Solution* :  $P(X \geq 3n) \leq \frac{1}{2^{3n}} \left(\frac{3}{2}\right)^{4n}$ .

5. *Solution* : La question 4. donne le meilleur résultat et la 2. le moins bon.

**Exercice 14 : (★★)**

1. Remarquer que  $P(X - E(X) \geq a) \leq P((X - E(X) + t)^2 \geq (a + t)^2)$  et appliquer l'inégalité de Markov.

2. Etudier le minimum de  $t \mapsto \frac{t^2 + V(X)}{(t+a)^2}$ .

3. Remarquer que  $P(|X - E(X)| \geq a) = P(X - E(X) \geq a) + P(X - E(X) \leq -a)$  et appliquer l'inégalité précédente à  $-X$ .