


## I Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base


**Exercice 1 :** 

*Solution :*  $\det A = 21$  et  $\det B = 21$ .

**Exercice 2 :** 

Utiliser la linéarité par rapport aux colonnes pour simplifier les calculs.

*Solution :*  $d = 17000$ .

**Exercice 3 :** (★) 

- On choisit des valeurs de  $x$  telles que  $C_1 = C_2$ , puis telles que  $C_1 = -C_3$

*Solution :*  $\pm 2, \pm 3$

- Développer  $D$  en utilisant la règle de Sarrus. Sans simplifier l'expression obtenue, étudier la forme de  $D$ .

*Solution :*  $D$  est une fonction polynomiale de degré 4.

- Comme  $D$  est un polynôme de degré 4 admettant  $\pm 2$  et  $\pm 3$  comme racines, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$D(x) = \lambda(x-2)(x+2)(x-3)(x+3).$$

Comme  $\lambda$  est le coefficient dominant de  $D$ , on utilise l'expression de 2. pour le calculer.

*Solution :*  $D(x) = 2(x^2 - 4)(x^2 - 9)$

**Exercice 4 :** 

Se ramener au calcul de  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ .

*Solution :* La famille est une base.

## II Déterminant d'un endomorphisme

**Exercice 5 :** 

Se placer dans la base canonique.

*Solution :*  $\det u = -1$

**Exercice 6 :** 

Se placer dans la base canonique.

*Solution :*  $\det u = (n+1)!$

**Exercice 7 :** (★)

Se placer dans la base  $(1, X, X^2)$ .

*Solution :*  $\det \varphi = 1$

**Exercice 8 :** (★★)

Remarquer que  $\det(f^3) = \det(-2f)$ .


*Solution :*  $\{0, \pm 2^{n/2}\}$  si  $n$  pair;  $\{0\}$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $n$  impair;  $\{0, \pm i 2^{n/2}\}$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et  $n$  impair

## III Déterminant d'une matrice carrée

**Exercice 9 :** (★)

- On peut appliquer la règle de Sarrus.
- Remarquer que :

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{pmatrix}.$$

**Exercice 10 :** 

Utiliser les déterminants de la transposée et de l'opposé.

**Exercice 11 :** (★)

- Calculer le déterminant de  $\mathcal{B}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .
- Calculer  $f(u_i)$  en fonction de  $u_i$  pour  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ .  
*Solution :*  $B = \text{diag}(1, 2, 3, 4)$
- Solution :*  $\det B = \det f = \det A = 24$

**Exercice 12 :** (★)

En utilisant une formule de trigonométrie, montrer que les colonnes de  $A$  appartient à un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à 2 et qu'ainsi elles forment une famille liée.

*Solution :*  $\det A = 0$


**Exercice 13 : (★★)**

- Calculer  $A^2$ .
- Si  $A$  est nilpotente, montrer que  $\det(A) = 0$  puis que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = (\text{tr}(A))^{k-1} \cdot A$ .

**IV Calcul des déterminants****Exercice 14 :** 


Trouver une forme factorisée du déterminant de  $M(\lambda)$ .

*Solution :*  $\lambda \notin \{2, -4\}$

**Exercice 15 :** 

Effectuer l'opération  $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$  pour factoriser  $\det(A)$ .

*Solution :*  $a + b + c \neq 0$

**Exercice 16 :** 

Effectuer les opérations :  $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, C_i \leftarrow C_i - C_{i-1}$ .

*Solution :* 1

**Exercice 17 : (★★)**

Effectuer des opérations bien choisies sur les lignes et les colonnes.

*Solution :*  $-(n-1)(-2)^{n-2}$

**Exercice 18 : (★★)** Effectuer les opérations  $C_j \leftarrow C_j + C_{j-1}$  pour  $j$  allant de  $p$  à 2 et utiliser la formule du triangle de Pascal.

*Solution :* 1

**Exercice 19 : (★)**

Déterminer la matrice de  $u_A$  dans la base canonique.

**Exercice 20 :** 

Développer  $\Delta_{n+1}$  par rapport à la première ligne.

*Solution :*  $\Delta_{n+1} = 2\Delta_n$  et  $\Delta_n = 2^{n-1}$

**Exercice 21 : (★)**

Effectuer une preuve par récurrence et développer, par exemple, par rapport à la première colonne.

**Exercice 22 : (★)**


Effectuer les opérations  $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$  pour  $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$  puis développer par rapport à la dernière ligne.

*Solution :*  $a_1(a_1 - a_2)^{n-1}$

**Exercice 23 : (★★)**

Développer par rapport à la dernière colonne puis par rapport à la dernière ligne pour obtenir la relation de récurrence d'ordre 2 :  $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ .

*Solution :*  $\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$  si  $a \neq b$ ,  $(n+1)a^n$  si  $a = b$ .

**Exercice 24 : (★★)** 

Considérer la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{s-1} & \lambda_2^{s-1} & \dots & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix}$ , remarquer qu'elle est inversible en

utilisant le déterminant de Vandermonde.

Si on pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \sum_{k=1}^s a_k \lambda_k^n$ . Montrer que :

$$M \begin{pmatrix} a_1 \lambda_1^n \\ \vdots \\ a_s \lambda_s^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+s-1} \end{pmatrix}.$$

En déduire la limite de  $\begin{pmatrix} a_1 \lambda_1^n \\ \vdots \\ a_s \lambda_s^n \end{pmatrix}$ .

Conclure en utilisant l'hypothèse sur les modules de  $\lambda_1, \lambda_s$ .

**Exercice 25 : (★★★)**

Utiliser, en le justifiant, la continuité de  $x \mapsto \det(A + xB)$ .