

## I Produit scalaire

### Exercice 1 :

Utiliser la définition d'un produit scalaire.

### Exercice 2 :

Utiliser la définition d'un produit scalaire.

## II Norme associée à un produit scalaire

### Exercice 3 :

Utiliser l'identité du parallélogramme.

### Exercice 4 : (★)

1. Elever au carré.
2. Remarquer que  $\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\|$  pour  $x, y, z$  bien choisis.

### Exercice 5 : (★)

Remarquer que  $n^2 = \left(\sum_{i=1}^n 1\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2$ .

Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire usuel dans  $\mathbb{R}^n$  à des vecteurs bien choisis.

*Solution :* On a égalité ssi  $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$

### Exercice 6 : (★)

Se ramener au cas où  $f > 0$  et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à  $\sqrt{f}$  et  $\frac{1}{\sqrt{f}}$ .

### Exercice 7 : (★)

Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel de  $\mathcal{C}^0([0, 1])$ .

### Exercice 8 : (★)

Utiliser l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz réelle.

### Exercice 9 : (★★)

Montrer que  $1 + f^2 \leq (1 + f)^2$  pour obtenir la majoration de l'intégrale.

Pour la minoration, remarquer que  $\sqrt{(\sqrt{1+f^2}+f)}\sqrt{(\sqrt{1+f^2}-f)} = 1$  et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

### Exercice 10 : (★)

1. Utiliser la définition.
2. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à  $f$  et  $g : t \mapsto t$ .

## III Orthogonalité

### Exercice 11 : (★★)

Utiliser la définition de l'orthogonal et raisonner par double inclusion.

### Exercice 12 : (★★)

1. Pour montrer que  $f = 0$  sur  $]0, 1]$  se ramener à une fonction continue et positive d'intégrale nulle puis utiliser un argument de continuité pour montrer que  $f = 0$ .  
*Solution :*  $f$  et  $g$  sont orthogonaux.
2. *Solution :*  $H^\perp = \{0\}$ ,  $H^{\perp\perp} = E$ .

### Exercice 13 : (★★)

Remarquer que  $D_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(E_{1,1}, \dots, E_{n,n})$  et traduire l'orthogonal avec les vecteurs  $E_{i,i}$ .

*Solution :* L'ensemble des matrices de diagonale nulle.

### Exercice 14 : (★★)

1. Utiliser la définition.
2. Utiliser les résultats sur les dérivées des polynômes.  
*Solution :*  $L_p$  est de degré  $p$  et de coefficient dominant  $\frac{(2p)!}{p!}$ .
3. Réaliser  $q$  intégrations par parties et remarquer que 0 et 1 sont racines de multiplicité  $q$  de  $Q_q$ .  
Montrer que  $(L_0, \dots, L_n)$  est orthogonale et compter les vecteurs.  
*Solution :*  $\langle L_p, L_q \rangle = 0$  pour  $p \neq q$ .
4. Effectuer  $p$  intégrations par parties.  
*Solution :*  $\|L_p\| = \frac{p!}{\sqrt{2^{p+1}}}$ .

### Exercice 15 :

Utiliser l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

*Solution :*  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ ,  $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$ ,  $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$ .

**Exercice 16:** 

Utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

*Solution* :  $\frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{15}}(3, -2, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{35}}(3, 3, -4, 1), \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, 1, -2)$ .

**Exercice 17:** (★)

1. Utiliser la définition du produit scalaire.
2. Utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

*Solution* :  $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(X^2 - \frac{1}{3}), \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(X^3 - \frac{3}{5}X)$ .

**Exercice 18:** (★)

Utiliser la définition du produit scalaire.

*Solution* :  $(1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(2, 1, 0), \sqrt{2}(-1, -\frac{1}{2}, 1)$ .

**Exercice 19:** (★)

1. Utiliser la définition.
2. Orthonormaliser la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

*Solution* :  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{X-1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}(X^2 - 2X + \frac{1}{3}))$

## IV Bases orthonormées d'un espace euclidien

**Exercice 20:** 

Utiliser l'écriture matricielle du produit scalaire.

Pour les normes, utiliser le théorème de Pythagore.

**Exercice 21:** (★★)

Appliquer l'hypothèse à  $x = e_j$  pour montrer que la famille est orthogonale. Pour montrer

que c'est une base, calculer  $\|x - \sum_{k=1}^n (e_k | x) e_k\|^2$ .

**Exercice 22:** (★★)

1. Montrer que si  $x \in \ker(\varphi - id_E)$  et  $y \in \text{Im}(\varphi - id_E)$ , alors  $(x|y) = 0$  et en déduire une inclusion. Utiliser les dimensions pour prouver l'égalité.
2. Remarquer que  $(\varphi - id_E)^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \text{Im}(\varphi - id_E) \subset \ker(\varphi - id_E)$  et utiliser la question précédente.

## V Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

**Exercice 23:** 


Chercher les polynômes  $P = aX^2 + bX + c$  tels que  $(P|X+1) = 0$  et  $(P|X^2) = 0$ .

*Solution* :  $F^\perp = \text{Vect}(X-1)$

**Exercice 24:** 



Expliciter les coefficients du projeté orthogonal d'un vecteur quelconque en résolvant un système ou en utilisant une base orthonormée de  $F$ .

*Solution* :  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Exercice 25:** 

Expliciter les coefficients du projeté orthogonal d'un vecteur quelconque en résolvant un système ou en utilisant une base orthonormée de  $F$ .

*Solution* :  $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

**Exercice 26:**  

1. Soit  $q$  la projection orthogonale sur  $\text{Vect}(u)$ . On a  $p(x) = x - q(x)$ . Remarquer que  $(\frac{u}{\|u\|})$  est une base orthonormée de  $\text{Vect}(u)$ . Utiliser la formule de calcul d'une projection orthogonale dans une base orthonormée pour calculer  $q(x)$ .
2. Utiliser  $s = 2p - Id$ .

**Exercice 27:** (★)

Ecrire  $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$  et remarquer que  $p(e_j) = \frac{(e_j|u)}{\|u\|^2} u$ .

*Solution* :  $u = \lambda \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\|e_i\|^2}$

**Exercice 28:** (★★)

Si  $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ , montrer que  $\text{Im } p \subset (\ker p)^\perp$ , en utilisant  $E = \ker p \oplus (\ker p)^\perp$  et conclure, en utilisant les dimensions, sur l'égalité de ces espaces.

**Exercice 29:** (★)

1. Orthonormaliser la famille  $(e_1, e_2)$ .  
*Solution* :  $(f_1, f_2)$  avec  $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)$  et  $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1)$ .
2. Chercher les vecteurs orthogonaux à  $e_1$  et  $e_2$ .  
*Solution* :  $F^\perp = \text{Vect}((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$ .

3. Utiliser la relation  $p(x) = (x|f_1)f_1 + (x|f_2)f_2$ .

$$\text{Solution : } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Exprimer la distance en fonction de la projection orthogonale.

$$\text{Solution : } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**Exercice 30 : (★)**

Remarquer que  $F^\perp = \text{Vect}(u)$  avec  $u = (1, 2, -3, 1)$  et exprimer la projection orthogonale de  $x$  sur  $F^\perp$ . Faire ensuite le lien avec la distance.

$$\text{Solution : } \frac{1}{\sqrt{15}}$$

**Exercice 31 : (★)**

Montrer que  $p(U) = 2X - 5$ .

$$\text{Solution : } 2$$

**Exercice 32 : (★★)**

1. Utiliser la définition du produit scalaire.

*Solution :  $E$  est de dimension infinie donc non euclidien.*

2. Orthonormaliser la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

$$\text{Solution : } 1, \sqrt{12}(X - \frac{1}{2}), \sqrt{180}(X^2 - X + \frac{1}{6}).$$

3. Remarquer que  $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2 = \|X^2 - p(X^2)\|^2$  où  $p$  est la projection orthogonale sur  $\mathbb{R}_1[X]$ , puis calculer  $p(X^2)$  en utilisant la base de la question précédente.

$$\text{Solution : } \frac{1}{180}$$

**Exercice 33 : (★)**

Remarquer que  $F^\perp = \text{Vect}(X^3 + X^2 + X + 1)$  et exprimer la projection orthogonale de  $X$  sur  $F^\perp$ . Faire ensuite le lien avec la distance.

$$\text{Solution : } \frac{3}{2}$$

**Exercice 34 : (★★)**

Remarquer que :  $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bU\| = d(M, \text{Vect}(I_n, U)) = \|M - p(M)\| = \sqrt{(M - p(M), M)}$  et écrire un système.

$$\text{Solution : } 0 \text{ si } n = 1, \sqrt{\|M\|^2 + \frac{s - nt}{n(n-1)}t + \frac{t - s}{n(n-1)}s} \text{ sinon, où } t = \sum_{i=1}^n m_{i,i} \text{ et } s = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}.$$

**Exercice 35 : (★★)**

1. Il reste uniquement à prouver que  $I$  et  $P$  sont orthogonaux.

2. Calculer la partie paire ou la partie impaire de  $f$ .

$$\text{Solution : } \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ln 3}$$