

I Convergence et divergence

Exercice 1 :

Reconnaître une série télescopique.

Solution : divergente

Exercice 2 :

Faire apparaître une ou deux séries télescopiques.

Solution : $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 3 : (★)

Écrire la décomposition en éléments simples de $\frac{3X+2}{X(X+1)(X+2)}$ et faire apparaître une série télescopique.

Solution : 2

Exercice 4 : (★★)

Montrer que : $\frac{6^n}{(3^{n+1} - 2^{n+1})(3^n - 2^n)} = \frac{1}{1 - (2/3)^n} - \frac{1}{1 - (2/3)^{n+1}}$.

Solution : 2

II Séries à termes positifs

Exercice 5 :

Étudier $\sum_{n \geq 0} (w_n - u_n)$ qui est une série à terme général positif.

Exercice 6 : (★)

Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer que la suite des sommes partielles est majorée.

Solution : $\sum v_n$ converge.

Exercice 7 : (★★)

Remarquer que pour $k \in \llbracket \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n \rrbracket$, $u_n \leq u_k$ et sommer ces inégalités.

Exercice 8 : (★★)

1. On pose : $u_n = \frac{1}{(1+a_0)\dots(1+a_n)}$. En remarquant que $a_n = (a_n + 1) - 1$, on a $v_n = u_{n-1} - u_n$ et faire apparaître une somme télescopique.

2. En utilisant les sommes télescopiques, montrer que : $\sum_{k=0}^n v_k = 1 - u_n$.

En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^n (1+a_k)} = 0$. Or, en utilisant le logarithme, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^n (1+a_k)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \ln(1+a_k) = +\infty.$$

Montrer une implication en utilisant : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$ et l'autre implication en raisonnant par l'absurde et en utilisant $\ln(1+x) \sim x$.

Exercice 9 : (★★)

1. (a) Montrer que (u_n) est croissante à partir d'un certain rang puis en déduire que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(b) Se ramener, à partir d'un certain à rang, à la comparaison avec une série géométrique convergente.

2. (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2(\sin \alpha)^2$ et utiliser la question 1. dans le cas $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$.

Solution : $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

(b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{e}$ et utiliser la question 1.

Solution : $\sum u_n$ converge.

(c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ et utiliser la question 1.

Solution : $\sum u_n$ converge.

(d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$ et utiliser la question 1.

Solution : $\sum u_n$ converge.

Exercice 10 : (★)

Si $\sum u_n$ converge, utiliser la comparaison des séries à termes positifs.

Si $\sum v_n$ converge, montrer que $u_n \sim v_n$.

Solution : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Exercice 11 : (★★)


1. Utiliser la définition de la limite et sommer les inégalité de n à N .

2. Utiliser la définition de la limite et faire un découpage de somme.

Exercice 12: 

Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{3/2}$.

Solution : $\sum u_n$ converge.

Exercice 13: 

1. Montrer que $u_n \sim \frac{\pi^2 (\ln n)^{1000}}{2n^2}$.

Solution : $\sum u_n$ converge.

2. Montrer que $v_n \sim \frac{2a-9}{6n}$, si $a \neq \frac{9}{2}$ et $v_n \sim -\frac{9}{8n^3}$, si $a = \frac{9}{2}$.

Solution : $\sum v_n$ converge ssi $a = \frac{9}{2}$.

Exercice 14: 

1. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n^2}$.


Solution : $\sum u_n$ converge.

2. Montrer que $\lim u_n = +\infty$.

Solution : $\sum u_n$ diverge.

3. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Solution : $\sum u_n$ diverge.

Exercice 15: 

Montrer, en effectuant un développement limité, que $u_n \sim -\frac{3}{n^2}$.

Solution : $\sum u_n$ converge.

Exercice 16: (★)

1. Calculer $\lim n^{5/4} u_n$ *Solution* : $\sum u_n$ converge.

2. Calculer $\lim n v_n$ *Solution* : $\sum v_n$ diverge.

Exercice 17: (★★)

1. Utiliser la comparaison série-intégrale.

Solution : $S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

2. Encadrer, de la même façon que pour la comparaison série-intégrale, $\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha}$ et faire tendre N vers $+\infty$.

Solution : $R_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$

Exercice 18: (★★)

Si $p = 0$ ou 1 , minorer u_n par le terme général d'une série divergente.

Si $p \geq 3$, majorer u_n par les terme général d'une série convergente.

Si $p = 2$, majorer u_n par la somme de deux termes généraux de séries convergentes.

Solution : $\sum u_n$ converge ssi $p \geq 2$.

Exercice 19: (★★)

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{n^2}{2} \leq k^2 + (n-k)^2 \leq 2n^2.$$

En déduire un encadrement de u_n faisant apparaître le terme général d'une série de Riemann.

On peut également faire apparaître des sommes de Riemann pour montrer que $u_n \sim \frac{l}{n^{2a-1}}$ avec $l > 0$.

Solution : La série converge ssi $a > 1$

Exercice 20: (★★)

Se ramener à l'étude de la série $\sum (u_n - u_{n-1})$ et calculer un équivalent de $u_n - u_{n-1}$.

Exercice 21: (★★) 

Refaire le raisonnement de l'exercice 18 pour montrer que : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_n = S_n - \ln n - \gamma$.

On a alors $\lim t_n = 0$.

Montrer que $t_{n+1} - t_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ puis, comme dans l'exercice 15, que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$.

En déduire la conclusion.

Exercice 22: (★★)

Si $\lambda > 1$, considérer $l \in]1, \lambda[$ et montrer qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq \frac{1}{n^l}$.

Si $\lambda < 1$, considérer $l \in]\lambda, 1[$ et montrer qu'à partir d'un certain rang $u_n \geq \frac{1}{n^l}$.

Exercice 23: (★★★)

Poser $S_n = \sum_{k=1}^n \varphi(k)$. Montrer que $S_n \geq \sum_{k=1}^n k$ en utilisant l'injectivité de φ .

III Séries absolument convergentes

Exercice 24: 

1. Montrer que $|u_n| \sim \frac{1}{n^2}$.

Solution : $\sum u_n$ converge.

2. Majorer $|u_n|$ par une quantité équivalente à $\frac{1}{2n^2}$.

Solution : $\sum u_n$ converge.

3. Majorer $|u_n|$.

Solution : $\sum u_n$ converge.

4. Majorer $|u_n|$ et utiliser un équivalent.

Solution : $\sum u_n$ converge.

Exercice 25 : (★)

1. Montrer, en effectuant un développement limité, que $u_n \sim \frac{2-k}{2n}$ et traiter le cas particulier $k = 2$.

Solution : $\sum u_n$ converge ssi $k = 2$.

2. Montrer, en effectuant un développement limité, que $u_n \sim \frac{e^2(2a^2-1)}{n}$ et traiter les cas particuliers $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solution : $\sum u_n$ converge ssi $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 26 : (★★)

1. Poser $v_n = \ln(n^a u_n)$ et montrer que $v_{n+1} - v_n = O(\frac{1}{n^2})$.

2. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{b-a}{n} + O(\frac{1}{n^2})}$.

Solution : $\sum u_n$ converge ssi $b - a > 1$.

Exercice 27 : (★★)

1. (a) Utiliser la définition des suites adjacentes.

(b) Utiliser un résultat sur les suites extraites.

2. (a) Distinguer les cas $\alpha \leq 0$, $0 < \alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$.

Solution : si $\alpha \leq 0$ la série diverge, si $0 < \alpha \leq 1$ la série converge mais ne converge pas absolument et si $\alpha > 1$ la série converge absolument.

(b) Montrer que : $u_n = \frac{(-1)^n}{2en} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Solution : $\sum u_n$ converge.

(c) Montrer que : $u_n = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Solution : $\sum u_n$ converge.

(d) Effectuer le changement de variable $t = x - n\pi$ et faire apparaître une série alternée.

Solution : $\sum u_n$ converge.