Indications du chapitre 27 : Fonctions de deux variables

I Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues

Exercice 1 :

1. Calculer g.
   Solution : $a < \frac{3}{2}$
2. Une implication se montre en utilisant 1. et l'autre avec des inégalités.
   Solution : $a < \frac{3}{2}$

Exercice 2 :

1. Remarquer que $2x^5y^3 \leq x^{10} + y^6 \leq x^4(x^6 + y^4) + y^2(x^6 + y^4)$.
   Solution : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$ et $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)$.
   Solution : f n'a pas de limite en $(0,0)$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$.
   Solution : f n'a pas de limite en $(0,0)$.

Exercice 3 :

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$.
   Solution : f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x^2)$ et si $x_0 \neq 0$, $\lim\limits_{y\to 0^+} f(x_0,y)$.
   Solution : f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x\in\mathbb{R}\}$.
3. Montrer que $|f(x,y)| \leq |y|$.
   Solution : f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 : ($\star$)

1. Calculer la limite de f en (x_0,y_0) dans les cas suivants : $x_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$; $x_0 \neq 0$ et $y_0 = 0$; $x_0 = y_0 = 0$.
   Solution : f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \left(\{(x,0), x\in\mathbb{R}^*\} \cup \{(0,y), y\in\mathbb{R}^*\}\right)$.
2. Utiliser le théorème des accroissements finis.
   Solution : f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

II Dérivées partielles

Exercice 5 :

1. Calculer les taux d'accroissements.
   Solution : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$.
2. Calculer les taux d'accroissements.
   Solution : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
3. Calculer les taux d'accroissements.
   Solution : f n'a pas de dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Exercice 6 :

Remarquer que $f(x,y) = x\int_0^y \varphi(t)\,dt - \int_0^y t\varphi(t)\,dt$.
Solution : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_0^y \varphi(t)\,dt$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x-y)\varphi(y)$.

Exercice 7 : ($\star$)

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ si $(x,y) \neq 0$ puis, en utilisant des taux d'accroissements $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
   Montrer que $\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) \neq \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
   Solution : f n'est pas $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$.
2. En utilisant les limites à gauche et à droite des taux d'accroissements, montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'existe pas en $(0,0)$.
   Solution : f n'est pas $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$.

Exercice 8 : ($\star\star$)

1. Considérer $(x_0,y_0) \in U$. On cherche r tel que $B((x_0,y_0),r) \subset U$. Si $x_0 \neq 0$, prendre $r = |x_0|$, si $x_0 = 0$, prendre $r = -y_0$.
   Utiliser les taux d'accroissement pour calculer les dérivées partielles en $(x_0,0)$, avec $x_0 \in \mathbb{R}^*$.
   Solution : $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y & si\ (x,y) \in \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*} \\ 3y & si\ (x,y)\in\mathbb{R}^{-*}\times\mathbb{R}^{-*} \\ 0 & sinon. \end{cases}$.
   f est $\mathcal{C}^1$ sur U.
2. *Solution : f n'est pas constante par rapport à x sur U, mais* $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. *En effet, si* $y \geq 0$, *$f(.,y)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas un intervalle.*

Exercice 9 : ($\star\star\star$)
Commencer par montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x),\ x \in \mathbb{R}\}$.
Calculer et simplifier $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et primitiver l'expression obtenue. Raisonner de même avec $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
Solution : $f(x,y) = (Arctan\, x + Arctan\, y).sgn(x+y)$.

Exercice 10 : ($\star\star$)

1. Calculer les dérivées partielles aux points différents de $(0,0)$ et utiliser les taux d'accroissement pour calculer les dérivées partielles en $(0,0)$. Utiliser des majorations de la valeur absolue des dérivées partielles pour prouver qu'elles sont continues en $(0,0)$.
2. Utiliser des taux d'accroissement pour calculer les 4 dérivées partielles d'ordre 2 en $(0,0)$.
   Solution : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$.
3. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ puis $\lim_{x\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,x)$. *Solution :* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *n'est pas continue en* $(0,0)$.

III Dérivées partielles et composées

Exercice 11 :
Solution : $g'(t) = 2\dfrac{\partial f}{\partial x}(2t, 1+t^2) + 2t\dfrac{\partial f}{\partial y}(2t,1+t^2)$

Exercice 12 :

1. *Solution :* $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x,y) + x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
2. *Solution :* $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x+y,x-y,y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x+y,x-y,y)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x+y,x-y,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x+y,x-y,y)$
3. *Solution :* $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,x)\right)\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,f(x,x))$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(y,f(x,x))$
4. *Solution :* $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(xy,\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(xy,\frac{x}{y}\right)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(xy,\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(xy,\frac{x}{y}\right)$.

Exercice 13 : ($\star\star$)

1. Calcul.
2. Utiliser la dérivation des fonctions composées.
3. Poser $\psi(u,v) = f(u,uv)$ et montrer que $\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) = 0$.
4. D'après la question précédente, si f est solution, il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(u,uv) = g(v)$.
   Solution : $\left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & g\left(\frac{y}{x}\right) \end{array},\ g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \right\}$.

Exercice 14 : ($\star\star$)
Montrer que si f est solution alors $\frac{\partial (f\circ g)}{\partial \theta}(r,\theta) = kf\circ g(r,\theta)$. En déduire que $f\circ g(r,\theta) = \varphi(r)e^{k\theta}$.
Solution : $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \varphi(r)e^{k\theta}$ *où* $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$. *Si* $k \neq 0$*, l'équation n'a pas de solution continue sur* $\mathbb{R}^2$*, si* $k = 0$*, toutes les solutions sont continues sur* $\mathbb{R}^2$.

IV Extremums

Exercice 15 :
Le seul point critique est $(0,0)$. Etudier le cas $y \geq -1$ et $f(y,y)$.
Solution : f *a un minimum local en* $(0,0)$ *mais* f *n'a pas d'extremum global.*

Exercice 16 : ($\star$)

1. Le seul point critique est $(0,0)$. Calculer $f(x,0)$ et conclure.
   Solution : f *n'admet pas d'extremum local.*
2. Le seul point critique est $(0,0)$. Etudier le signe de f et conclure.
   Solution : f *admet* 0 *comme minimum global, il est atteint en* $(0,0)$.

Exercice 17 : ($\star$)

1. Le seul point critique est $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Montrer que $f\left(\frac{1}{3}+h,\frac{1}{3}+k\right) - f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = h^2+k^2+(h+k)^2$. Conclure.
   Solution : f *admet* $\frac{1}{3}$ *comme minimum global, il est atteint en* $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.
2. Le seul point critique est $(0,0)$. Calculer $f(x,0)$ puis $f(x,\lambda x^2)$ en choisissant bien λ et conclure.
   Solution : f *n'admet pas d'extremum local.*
3. Le seul point critique est $(0,0)$. Calculer un équivalent au voisinage de 0 de $f(x,-x^3)$ et conclure.
   Solution : f *n'admet pas d'extremum local.*