

I Noyaux et images

Exercice 1 :

Utiliser la définition du noyau et de l'image.

Exercice 2 : (★)

Raisonner par double implication et double inclusion.

Exercice 3 : (★★)

- (a) Montrer que $\ker(u) = \{0\}$.
(b) Utiliser la définition de la surjectivité.
(c) Montrer que $\text{Im}(u) \cap \ker(v) = \{0\}$ et décomposer tout vecteur de F comme somme d'un élément de $\text{Im}(u)$ et d'un élément de $\ker(v)$. On pourra remarquer que pour tout $x \in F$, il existe $x_1 \in E$ tel que $v(x) = v \circ u(x_1)$.
- Montrer que $\ker(w) = \{0\}$ en utilisant $\text{Im}(u) \cap \ker(v) = \{0\}$ et u injectif puis que w est surjectif en utilisant $\text{Im}(u) + \ker(v) = F$ et v surjectif.

II Bases et matrices

Exercice 4 : (★)

- On peut utiliser le déterminant.
- Solution* : $\text{diag}(2, -1, 0)$
- Solution* : $\ker(f) = \text{Vect}(e_3)$, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(e_1, e_2)$, $\text{rg}(f) = 2$ et $f \notin \text{GL}(\mathbb{R}^3)$

Exercice 5 : (★★)

Résoudre $AX = 0$, $AX = -X$ et $AX = X$.

$$\text{Solution} : P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : (★★)

- Remarquer que $f^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.
Solution : $f^{-1} = f$
- Prendre $e_1 \neq 0$ et $e_2 = f(e_1)$. Montrer que (e_1, e_2) est une base de \mathbb{R}^2 et écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 7 : (★★)

- (a) Ecrire la base canonique sous la forme $(X^{j-1})_{j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$.
Solution : $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ si $i \leq j-1$ et 0 sinon.
(b) Remarquer que A est triangulaire.
Solution : $f \notin \text{GL}(\mathbb{R}_n[X])$
- (a) Etudier le coefficient de $f(P)$ devant X^p où $p = \text{deg}(P)$ /
(b) Par récurrence.
- En utilisant les degrés, montrer que $f^{n+1}(P) = 0$.

III Projections

Exercice 8 : (★)

Remarquer que l'endomorphisme canoniquement associé à A est une projection p puis se placer dans une base adaptée à $\mathbb{R}^n = \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$.

Exercice 9 : (★)

Pour la réciproque, il suffit de montrer que $u \circ p(x) = p \circ u(x)$ pour $x \in \text{Im}(p)$ et $x \in \ker(p)$.

Exercice 10 : (★)

Montrer que $u \circ u = u$ c'est-à-dire que u est un projecteur.

Exercice 11 : (★★)

- Calcul matriciel.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n .

- Utiliser la formule de changement de base.
- Ecrire la matrice de p dans une base adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$.

IV Vers la réduction

Exercice 12 : (★★)

- Utiliser le déterminant du produit.
- Remarquer que $(A - \beta I_n)(X) \in \ker(A - \alpha I_n)$ et $(A - \alpha I_n)(X) \in \ker(A - \beta I_n)$
- Remarquer que $AX = \alpha X$ puis raisonner par récurrence.

4. (a) Utiliser 2.
 (b) *Solution* : $diag(\alpha, \dots, \alpha, \beta, \dots, \beta)$
 (c) Utiliser une formule de changement de base.
5. Remarquer que A^k est semblable à $diag(\alpha^k, \dots, \alpha^k, \beta^k, \dots, \beta^k)$.

Exercice 13 : (★★)

1. (a) Remarquer que $(f - \beta Id_E)(x) \in \ker(f - \alpha Id_E)$ et $(f - \alpha Id_E)(x) \in \ker(f - \beta Id_E)$.
 (b) Utiliser la décomposition obtenue dans la question précédente.
Solution : $x_1 = \frac{1}{\alpha - \beta}(f(x) - \beta x)$ et $x_2 = -\frac{1}{\alpha - \beta}(f(x) - \alpha x)$
2. (a) *Solution* : $q = Id_E - p$, $p \circ q = q \circ p = 0$
 (b) Utiliser la décomposition obtenue à 1.b.
Solution : $p = \frac{1}{\alpha - \beta}(f - \beta Id_E)$ et $q = -\frac{1}{\alpha - \beta}(f - \alpha Id_E)$

(c) *Solution* : $f = \alpha p + \beta q$

3. Utiliser la formule du binôme de Newton.

Solution : $f^n = \alpha^n p + \beta^n q$

Exercice 14 : (★★)

1. Calculer le déterminant.
2. Utiliser la caractérisation des matrices inversibles.
3. (a) Se ramène à l'étude de $\det(\lambda_i I_n - D)$.
 (b) Utiliser un changement de base.
 (c) Calculer $f(e_i)$.