

## Mini-problème : Déterminant

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, f(e_i) = ie_i + (i-n)e_n \text{ et } f(e_n) = ne_n.$$

- (a) Pourquoi  $f$  est-elle bien définie?  
(b)  $f$  est-elle bijective? On donnera deux réponses : une utilisant le déterminant et l'autre ne l'utilisant pas.
- On pose :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_i = e_i + e_n \text{ et } \mathcal{C} = (f_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}.$$

- (a) Montrer que  $\mathcal{C}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ . On donnera deux réponses : une utilisant le déterminant et l'autre ne l'utilisant pas.  
(b) Expliciter la matrice  $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ .  
(c) Déterminer  $P^{-1}$ .
- On pose  $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$  et  $B = Mat_{\mathcal{C}}(f)$ .
  - Calculer  $\det(A)$ .
  - En déduire  $\det(B)$  sans calculer  $B$ .
  - Calculer  $B$  en utilisant deux méthodes différentes.

## Mini-problème : Déterminant

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, f(e_i) = ie_i + (i-n)e_n \text{ et } f(e_n) = ne_n.$$

- (a) Pourquoi  $f$  est-elle bien définie?  
(b)  $f$  est-elle bijective? On donnera deux réponses : une utilisant le déterminant et l'autre ne l'utilisant pas.
- On pose :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_i = e_i + e_n \text{ et } \mathcal{C} = (f_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}.$$

- (a) Montrer que  $\mathcal{C}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ . On donnera deux réponses : une utilisant le déterminant et l'autre ne l'utilisant pas.  
(b) Expliciter la matrice  $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ .  
(c) Déterminer  $P^{-1}$ .
- On pose  $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$  et  $B = Mat_{\mathcal{C}}(f)$ .
  - Calculer  $\det(A)$ .
  - En déduire  $\det(B)$  sans calculer  $B$ .
  - Calculer  $B$  en utilisant deux méthodes différentes.