Matrices et probabilités

d'après E3A - MP - 2023

Soit n un entier naturel non nul.

On rappelle que la trace d'une matrice carrée M notée $\mathrm{tr}(M)$ est la somme des coefficients diagonaux de M. On pourra admettre que deux matrices semblables ont la même trace.

1. Soit p une projection vectorielle de rang $r \in \mathbb{N}$.
   (a) Donner, en fonction de r, une matrice W de p dans une base adaptée.
   (b) Comparer $\mathrm{rg}(W)$ et $\mathrm{tr}(W)$.
   (c) Calculer $\det(W)$.

On considère la famille $X_1, \dots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé (Ω, P) toutes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Soit M une variable aléatoire de Ω dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout ω dans Ω, $M(\omega)$ est semblable à $\Delta(\omega) = \mathrm{diag}\left(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\right)$.

2. On note T la variable aléatoire $\mathrm{tr}(M)$.
   (a) Déterminer $T(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T.
   (b) Donner la loi de probabilité de T et l'espérance de la variable aléatoire T.
3. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $R = \mathrm{rg}(M)$.
4. On note D la variable aléatoire $\det(M)$.
   (a) Déterminer $D(\Omega)$.
   (b) Donner la loi de probabilité de D et calculer l'espérance de la variable aléatoire D.
5. On appelle sous-espaces propres de la matrice M les espaces :
$$E_\lambda(M) = \ker(M - \lambda I_n) \text{ tels que } E_\lambda(M) \neq \{0\} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}.$$
   Montrer que M possède au plus deux espaces propres : $E_0(M)$ et $E_1(M)$.
6. On se propose de déterminer la probabilité de l'évènement Z :
   « les sous-espaces propres de la matrice M ont tous la même dimension »
   (a) On note V l'évènement : « M ne possède qu'un seul espace propre ». Calculer $P(V)$.
   (b) On suppose n impair. Déterminer $P(Z)$.
   (c) On suppose n pair et on pose $n = 2r$. Calculer $P(T = r)$. En déduire $P(Z)$.
7. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A(\omega) = U(\omega) \times (U(\omega))^\top = \left(a_{ij}(\omega)\right)_{[\![1,n]\!]^2}$.
   (a) Soit $\omega \in \Omega$. Déterminer, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij}(\omega)$.
   (b) Donner la loi de probabilité de chaque variable aléatoire a_{ij}.
   (c) Montrer que $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (d) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire $\mathrm{rg}(A)$.
   (e) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathrm{rg}(A)$.